N° d'enregistrement
au C.N.R.S.:A.O. 1133

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES : Mathématiques

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES
de PARIS

par

Max BAUSSET
Attaché de Recherches au C.N.R.S.

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Application de la méthode de Padé à la détermination des ondes de choc.

Thèse complémentaire : Proposition donnée par la Faculté.

soutenue le 1966 devant la Commission d'Examen

MM : MALAVARD Président
CABANNES
GUIRAUD Examinateurs
CASAL

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544323_0013

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.:A.O. 1133

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES : Mathématiques

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES
de PARIS

par

Max BAUSSET

Attaché de Recherches au C.N.R.S.

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Application de la méthode de Padé à la détermination des ondes de choc.

Thèse complémentaire : Proposition donnée par la Faculté.

soutenue le

devant la Commission d'Examen

MM : MALAVARD Président
CABANNES
GUIRAUD Examinateurs
CASAL

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE PARIS

I) FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

Professeurs

Le Doyen .....M. ZAMANSKY

PRENANT	T	Anatomie et histologie comparée	DE CUGNAC	T	Biologie végétale SPCN
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés	Mlle CAUCHOIS	T	Chimie physique
PREVOST	T	Chimie organique	THELLIER	T	Physique du globe
VYART	T	Minéralogie et cristallographie	PONCIN	T	Mécanique générale
TEISSIER	T	Zoologie	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres
AUGER	T	Physique quantique et relativité			
MONNIER	T	Physiologie générale	QUELET	T	Chimie organique
PIVETEAU	T	Paléontologie	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
ROCARD	T	Physique E.N.S	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
CARTAN	T	Mathématiques E.N.S	CUVILLIER	T	Micropaléontologie
LAFFITTE	T	Chimie générale	JUNG	T	Géologie
N.....	T	Géométrie supérieure	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
COULOMB	T	Physique du globe			
Mlle COUSIN	T	Biologie animale SPCN	WIEMANN	T	Chimie organique et structurale
CHRETIEN	T	Chimie minérale			
BOCQUET	T	Zoologie	VASSY	T	Physique de l'atmosphère
KASTLER	T	Physique E.N.S	DESTOUCHES	T	Théorie physique
EPHRUSSI	T	Génétique	AMIEL	T	Chimie générale
GAUTHERET	T	Biologie végétale CPEM	HOCART	T	Minéralogie et cristallogr phie
LUCAS R.		Recherches physiques	J.P.MATHIEU	T	Physique optique
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire	COUTEAUX	T	Cytologie
MORAND	T	Physique enseignement	CHOQUET	T	Théorie des fonctions et topologie
SOLEILLET	T	Physique CPEM	FELDMANN	T	Biologie végétale marine
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides	JOST	T	Physiologie comparée
			FORTET	T	Calcul des probabilités et physique mathématique
DRACH	T	Zoologie			
QUENEY	T	Météorologie et dynamique de	SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et intégral
GALLIEN	T	Embryologie	CHOUARD	T	Physiologie végétale
EICHORN	T	Botanique	MALAVARD	T	Aviation(technique aéronautique)

BRELOT	T	Analyse supérieure
NORMANT	T	Synthèse organique
BENARD	T	Chimie appliquée
DUGUE	T	Statistique mathématique
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
ULRICH	T	Physiologie végétale appliquée
KIRRMANN	T	Théories chimiques
CHADEFAUD	T	Botanique
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie
DEVILLERS	T	Anatomie et histologie comparée
EHRESMANN	T	Topologie algébrique
FRANÇON	T	Physique SPCN
GLANGEAUD	T	Géographie physique, géologie dynamique
DODEMENT	T	Mathématiques MGP
PISOT	T	Technique mathématique de la physique
ROCH	T	Géologie
SCHATZMANN	T	Astrophysique
TERMIER	T	Géologie générale
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales
LENNUIER	T	Physique M.G.P
ROUTHIER	T	Géologie appliquée
Mme TONNELAT	T	Physique théorique
DIXMIER	T	Mathématiques M.P.C
SOUCHAY	T	Chimie générale
AIGRAIN	T	Electrotechnique
BRUSSET	T	Chimie systématique
LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies
Mme CHAIX	T	Chimie biologique
Mme HUREL PY	T	Biologie végétale CPEM
PANNETIER	T	Chimie générale I
BRUN	T	Mécanique des fluides I
Mme DUBREIL	T	Mathématiques(agrégation)
Mme LELONG	T	Mathématiques II E.N.S
BELLAIR	T	Géologie SPCN
COTTE	T	Physique électricité
DUBOIS J.E.	T	Chimie organique physique
LAMOTTE	T	Zoologie E.N.S
OLMER	T	Energétique générale
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée
KARCHEWITZ	T	Chimie physique
KROSSEL	T	Physique atomique
BUSER	T	Physiologie comparée
CAMUS	T	Physiologie végétale
CURIEN	T	Minéralogie et cristallographie
POSSOMPES	T	Zoologie
PULLMANN	T	Chimie quantique
TEILLAC	T	Physique nucléaire et radio-activité
VILLE	T	Econométrie
WILLEMART	T	Chimie CPEM
FREYMANN	T	Recherches physiques
ROLLET	T	Chimie minérale
Mlle JOSIEN	T	Chimie SPCN
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des grpupes
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides
LUCAS G.	T	Géologie
ALLARD	T	Chimie physique
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales
BRICARD	T	Météorologie
Mme ALBE-FESSARD	T	Psycho-physiologie
M.JULIA	T	Etude des molécules naturelles complexes
MAGAT	T	Physico-chimie des rayonnements
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie
MONOD	T	Chimie du métabolisme
DE POSSEL	T	Analyse numérique
CHARLOT	T	Chimie analytique
CHATELET	T	Chimie CPEM
MATTLER	T	Physique SPCN

BOUISSIERES	T	Radiochimie
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et mécanique physique
FRANC	T	Biologie animale CPEM
SCHNELL	T	Botanique tropicale
STOLKOWSKI	T	Physiologie générale
ACHER	T	Chimie biologique
BAUDOIN	T	Biologie animale CPEM
BEAUMONT		Biologie animale SPCN
BLAMONT		Géophysique ionosphère
BOUREAU	T	Botanique
CURIE D.		Physique MGP
DURAND DELGA	T	Géologie
HELLER	T	Physiologie végétale
TORTRAT	T	Calcul des probabilités
CAILLEUX	T	Géologie SPCN
MAGNAN		Physique électricité
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire
Mlle FOURCROY		Biologie végétale SPCN
Mme CHOQUET-BRUHAT		Mécanique analytique et mécanique céleste
Mlle VEIL	T	Physiologie générale
LWOFF	T	Microbiologie
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérimentale
CABANNES	T	Mécanique générale
CAIRE	T	Géographie physique et géologie dynamique
COMOLET		Mécanique des fluides
DELLOUE	T	Physique de l'exosphère
HOUILLON		Biologie animale CPEM
OLIVIER		Anthropologie
SAMUEL	T	Mathématiques (ENS Jeunes filles)
THIRY	T	Mécanique céleste
ABELES	T	Physique SPCN
AMAT	T	Thermodynamique
AUBOIN	T	Géologie
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire et radioactivité
BOUGIS		Biologie végétale marine Villefranche s/Mer
RIGAUDY	T	Chimie SPCN
COLLONGUES		Chimie SPEM
DUBERT		Biochimie
NOZIERES		Physique générale
CADIOT		Chimie organique
IVANOFF		Océanographie physique
FRANÇOIS		Zoologie
TALBOT		Génie chimique
Mme NOUGAREDE		Botanique
BRUHAT	T	Mathématiques MPC
FOURNET		Electricité générale
DEHEUVELS	T	Mathématiques propédeutique
FURON	T	Géologie SPCN
Mme GANS	T	Génétique
GENEVES		Biologie végétale CPEM
HUPE	T	Pétrographie
HOLLANDE	T	Biologie générale
LIONS	T	Analyse numérique
MAITTE	T	Chimie organique
NICOLAS		Géologie appliquée
PANIGEL		Biologie générale
RAVIER	T	Pétrographie
MOREL F.	T	Physiologie comparée
ROSEAU	T	Mécanique théorique des fluide
ROUBINE		Electronique E.S.E
SILBER	T	Chimie CPEM
UEBERSFELD	T	Electronique
	T	Théories physiques
HERVE	T	Mathématiques
Mme PECKER-WIMEL	T	Astrophysique

BALKANSKI		Physique M.P.C
LE CORRE	T	Electricité
NATAF	T	Physique nucléaire et radioactivité
ECHALIER		Biologie animale CPEM
BARRAUD	T	Physique CPEM
DARS		Géologie structurale et appliquée
CAMEFORT	T	Botanique (agrégation)
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle
SIGWALT	T	Chimie SPCN
BLAQUIERE		Electronique
BARUCH		Physique propédeutique
ARNOUS	T	Physique théorique
SLONIMSKI		Génétique
MALLIAVIN	T	Mathématiques propédeutique
GAUDEMAR		Chimie propédeutique
BROUSSE	T	Mécanique théorique
ROSCH	T	Astronomie
GUY	T	Physique expérimentale
LAZARD		Mathématiques MPC
MOREL P.		Physique MPC
ARSAC		Programmation
LEFEBVRE		Chimie MPC
BOK		Physique propédeutique
CHAPEVILLE		Biochimie
BENOIT		Physique CPEM
RIO		Chimie CPEM
JAUZEIN		Géologie E.N.S
PREVOST G.		Biologie végétale CPEM
FAVARD P.		Biologie animale CPEM
Mme CARNIAUX-COTTON		Evolution des êtres organisés
Mlle FICINI		Chimie CPEM
LEQUEUX		Astronomie
COHEN TANNOUDJI		Physique atomique
TAVERNIER		Physique CPEM
DURAND Michel		Microbiologie
PASCAUD		Physiologie
Mme PETIT		Biologie animale CPEM
CAGNAC		Physique agrégation
FALK-VAIRANT		Physique nucléaire
KRASNER	T	Mathématiques
BENZECRI	T	Statistiques
VINH MAU		Physique M.G.P
DUQUESNES		Physique CPEM
SCHUTZENBERGER		Programmation
TREMILLON		Chimie MPC
FAYARD		Chimie MPC
BUVET		Chimie CPEM
AUTHIER		Physique MPC
PICINBONO	T	Physique CPEM
BONNEFILLE		Electrotechnique
Mme PUISEUX DAO		Biologie végétale

LE SECRETAIRE GENERAL :

R.POULLAIN

II) FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

Professeurs

Vice-Doyen..... J. BERGERARD

MANGENOT G.	T	Biologie végétale
JACQUINOT P.	T	Optique
GUINIER A.	T	Electricité et physique des solides
GRIVET P.	T	Electronique
BLANC-LAPIERRE A.	T	Accélérateur linéaire
L'HERITIER P.	T	Génétique des virus
LEMEE G.	T	Ecologie végétale
MOYSE A.	T	Physiologie végétale
DODE M.	T	Chimie thermodynamique
DENY J.	T	Mathématiques
RIVIERE A.	T	Géologie générale et sédimentologie
MICHEL A.	T	Chimie minérale
MAY R.	T	Anatomie comparée
DELANGE H.	T	Mathématiques
CHAPELLE J.	T	Physique expérimentale
LACOMBE P.	T	Métallurgie
BENOIT P.	T	Physiologie générale
GUINOCHET J.	T	Biologie végétale SPCN
NERON A.	T	Mathématiques
NOZERAN R.	T	Botanique approfondie
CASTAING R.	T	Thermodynamique
ELLENBERGER F.	T	Géologie structurale
LEDERER E.	T	Chimie biologique
RIZET J.	T	Génétique
LENDER T.	T	Biologie animale SPCN
POITOU G.	T	Mathématiques
FREON P.	T	Chimie organique
TONNELAT	T	Biologie physico-chimique
BRUNN Jan	T	Géologie historique
JEAN M.	T	Physique nucléaire
BERGERARD J.	T	Zoologie
ROGER J.	T	Paléontologie
LEFORT M.	T	Chimie nucléaire
LAGARRIGUE A.	T	Physique des hautes énergies
JULLIEN J.	T	Chimie structurale organique
ARNULF A.	T	Optique
ROUAULT M.	T	Diffraction électronique
MARECHAL A.	T	Optique théorique et appliquée
MAZET R.	T	Mécanique générale
DAVID Serge	T	Chimie agrégation
GUERIN H.	T	Chimie des gaz et des combustibles
LESIEUR L.	T	Mathématiques MPC et algèbre
KOURGANOFF	T	Astronomie
ARNOULT P.	T	Physique électronique
KAHANE J.P.	T	Mathématiques
BROCHARD J.	T	Physique propédeutique
Mme ROIZEN	T	Physique C.P.E.M.
BERTEIN F.	T	Electronique
MALGRANGE B.	T	Mathématiques
CORABOEUF E.	T	Physiologie animale
FRIEDEL J.	T	Physique des solides
CHEVAUGEON J.	T	Cryptogamie
MEYER P.	T	Physique théorique et atomique
LEHMANN P.	T	Accélérateur linéaire

CHABBAL R.	T	Physique propédeutique
DELCROIX J.M.	T	Physique des plasmas
CERF J.	T	Mathématiques
D'ESPAGNAT B.	T	Physique théorique
SCHAEFFER P.	T	Microbiologie
DE GENNES P.	T	Physique des solides
Mme MARTY N.		Physique propédeutique
GOURDIN M.		Physique théorique
PEREZ-Y-JORBA		Physique propédeutique
GORENFLOT E.		Biologie végétale SPCN
RIOU M.		Physique nucléaire
BROUSSE R.		Géologie SPCN
LIORET C.		Physiologie végétale
CLAUSER H.		Chimie biologique
JANCOVICI B.		Physique atomique
LURCAT J.		Physique propédeutique
LE BERRE J.		Entomologie
LAVOREL J.		Biophysique
PERIO P.		Physique propédeutique
FETIZON M.		Stéréochimie
CHEMLA M.		Chimie des isotopes
MAZIERES C.		Chimie SPCN
VILKAS M.		Chimie CPEM
BLANDIN A.		Physique des solides
BRUN G.		Génétique
MERCOUROFF		Physique agrégation
ANDRE J.		Microscopie électronique
CHEVALLIER F.		Physiologie animale
Mlle MARCOU		Biologie cellulaire CPEM
BOURDU R.		Physiologie végétale
BERKALOFF C.		Biologie animale CPEM
Mlle LEFORT M.		Biologie cellulaire CPEM

Mme LAMBERT	Physique CPEM
BIZOT J.C.	Physique MPC
GUIRAUD J.P.	Mécanique
LABOUESSE B.	Chimie SPCN

Introduction

- Dans une première étude de l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle on suppose le champ des grandeurs caractérisant le fluide continu par rapport aux variables de temps et d'espace.Cependant dès la fin du siècle dernier,on a été conduit à l'occasion des problèmes de balistique,à envisager que ces grandeurs (vitesse,pression et masse spécifique) subissaient des discontinuités.Il y a une vingtaine d'années,les chercheurs en aérodynamique ont de nouveau marqué un grand intérêt pour les problèmes posés par la théorie des ondes de choc,car l'industrie préparait alors les premiers vols supersoniques.Les ondes de choc engendrées par le vol d'un avion supersonique ont été entendues pour la première fois en France en 1953.Après quelques années de mise en sommeil le problème revient une nouvelle et troisième fois à l'ordre du jour,car les ondes de choc jouent un rôle fondamental dans l'étude du retour dans l'atmosphère des satellites artificiels et des véhicules cosmiques en général.

- Ainsi le problème fondamental de l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle après s'être posé dans le domaine des vitesses faibles puis des vitesses supersoniques se pose à nouveau dans le domaine des très grandes vitesses.Cependant malgré les travaux considérables auxquels il a déjà donné lieu il ne peut pas être considéré comme complètement résolu.

- Les premiers travaux sur la propagation des discontinuités dans les fluides ont été effectués par Riemann,Rankine,Hugoniot puis Hadamard.Vers 1930 les problèmes relatifs aux chocs créés par des obstacles se déplaçant à des vitesses supersoniques ont été à nouveau étudiés et l'ouvrage de Courant et Friedrich paru en 1948 constitue une bonne synthèse des résultats acquis à ce sujet à cette date.Les progrès relatifs à la théorie des chocs sont en fait limités par nos connaissances sur les équations aux dérivées partielles.Lorsque l'étude de ces équations aura suffisamment progressé,sous l'influence de la topologie notamment, on pourra peut être reprendre les principaux résultats obtenus dans la théorie des chocs.

- Les résultats les plus nombreux obtenus sur le problème de l'écoulement d'un obstacle avec discontinuités sont relatifs à des obstacles dont le sommet se réduit à une pointe.Pour ceux-ci la surface de discontinuité peut être attachée au sommet.Les principaux résultats sont alors relatifs à l'écoulement et à la géométrie de la surface de choc au voisinage de la pointe ou au voisinage de

l'infini.De plus on se limite généralement aux écoulements plans ou de révolution.

- Lorsque le nez de l'obstacle est arrondi les résultats sont moins nombreux.Dans cette hypothèse il ne peut en effet exister d'onde de choc attachée à l'obstacle. Les méthodes locales au voisinage de l'obstacle ne sont pas possibles et la plupart des études faites ont été conduites par des méthodes permettant d'atteindre la forme et la position du choc de façon plus ou moins indirecte.Même en régime stationnaire l'une des difficultés pour la description des chocs détachés réside dans le fait que les conditions aux limites du problème font intervenir l'obstacle qui est une donnée et aussi l'onde de choc qui est une inconnue.

- La première méthode théorique pour aborder le problème des chocs détachés consiste à supposer que les grandeurs caractéristiques de l'écoulement (vitesse,pression, masse spécifique) ainsi que l'équation de la surface du choc sont définies par des développements en séries entières.La substitution de ceux-ci dans les équations du problème permet de déterminer les coefficients de ces développements de proche en proche.On obtient ensuite l'équation de l'obstacle comme surface de courant. (voir les travaux de Cabannes).L'inconvénient de la méthode,outre qu'elle détermine l'obstacle en dernier,réside dans le fait que même une approximation du quatrième ordre donne des résultats peu précis.

- La plupart des méthodes de résolution numérique sont des méthodes dites inverses. Comme précédemment on part de la surface du choc et l'on détermine de proche en proche l'écoulement dans la région aval de façon que la condition sur l'obstacle soit satisfaite.Mais dans le voisinage du nez où l'écoulement est subsonique, l'inconvénient majeur est le caractère d'instabilité permanente de la méthode qui est le fait des résolutions pas à pas des équations du type elliptique (voir les travaux de Garabedian,Mingler et Evans,Van Dyke,Van Dyle et Gordon).

- Moins nombreuses sont les méthodes numériques directes qui sont pourtant les plus logiques,l'obstacle d'où partent les itérations étant la véritable donnée du problème.L'avantage de ces méthodes est qu'elles sont applicables,en principe,à un obstacle de forme quelconque.On peut citer en particulier à ce sujet les travaux de Chubb,Holt,Gold,Dorodnitsym et Belotserkowskii.

- Parmi les autres méthodes numériques,on peut citer les méthodes itératives (Uchida et Yasuhasa) et les méthodes de relaxation (Hayes et Probstein) qui se rattachent aux méthodes directes.Il sera d'ailleurs utile de consulter au sujet des méthodes numériques une publication de Guiraud relative aux écoulements hypersoniques sur un obstacle arrondi.

- Une seconde méthode théorique a pour point de départ un obstacle instationnaire. Si un obstacle initialement au repos, part avec une vitesse non nulle dans un fluide également au repos, les coefficients de l'équation de la surface du choc peuvent être déterminés de proche en proche aussi loin que l'on voudra. Cabannes a ainsi déterminé, dans le cas des écoulements plans et de révolution, la vitesse et l'accélération initiale des chocs. On peut en déduire, si le mouvement de l'obstacle est uniforme, des propriétés relatives aux chocs détachés stationnaires, lorsque le régime permanent est atteint. L'approximation du second ordre est toutefois insuffisante pour obtenir des résultats comparables aux résultats expérimenteux, notamment en ce qui concerne la distance du choc à l'obstacle.

- Il était vain d'espérer atteindre ainsi des résultats valables pour les grandes valeurs du temps, donc pour les écoulements stationnaires. Van Dyke a eu l'idée d'améliorer les résultats en utilisant des théorèmes de Padé qui font connaitre la meilleure approximation d'une fonction analytique par des fractions rationnelles. Adoptant des fractions dont le numérateur et le dénominateur ont le même degré n, on obtient ainsi pour les fonctions inconnues du problème des valeurs approchées qui possèdent une limite lorsque le temps augmente indéfiniment. Les résultats de Cabannes permettaient d'atteindre le cas n = 1 pour des écoulements plans ou de révolution. Nous avons pu étendre ce problème aux écoulements à trois dimensions et aussi au cas n = 2.

- Le chapitre I indique les équations du problème et rappelle les résultats mathématiques concernant les transformations rationnelles de Padé et les transformations itérées de Shanks.

- Au chapitre II sont effectués les calculs des coefficients du développement de l'équation de la surface des chocs instationnaires par rapport au temps. Ces calculs sont effectués jusqu'au quatrième ordre inclus. Mais pour rester dans des limites raisonnables d'écriture le coefficient du quatrième ordre n'a été écrit en fonction des données du problème, qu'au sommet de l'obstacle. Nous avons essayé de donner un procédé de calcul des coefficients d'ordre supérieur.

- Le chapitre III est relatif aux chocs détachés instationnaires au voisinage du départ de l'obstacle. Nous avons déterminé la distance des sommets de l'obstacle et du choc ainsi que les courbures au sommet de ce dernier. Nous avons ensuite donné l'équation de la surface des chocs jusqu'au troisième ordre inclus.

- Au chapitre IV nous avons appliqué la méthode des séries tronquées aux résultats

précédents.Dans le cas d'un mouvement uniforme de l'obstacle,lorsque le régime permanent est atteint on a ainsi déterminé les grandeurs caractérisant géométriquement la surface des chocs détachés stationnaires : distance de l'obstacle au sommet,courbures moyenne et totale en ce point,équation globale représentant cette surface au premier ordre au sens des transformations de Padé-Shanks.

- Par la considération d'un obstacle en forme de nappe d'hyperboloïde et par passage à la limite,nous avons étendu les résultats précédents aux écoulements coniques stationnaires,avec chocs attachés à la pointe.Broderick a obtenu (dans le cas des mouvements de révolution) le premier terme du développement de l'angle d'ouverture du cône de choc par rapport à l'angle de l'ouverture de l'obstacle lorsque cet angle est supposé petit.Nous avons par ailleurs étendu cette formule aux écoulements magnétodynamiques.Il nous a été possible de donner ici la formule (complémentaire de celle de Broderick) relative aux cônes de grande ouverture animés de grandes vitesses.Nous avons enfin donné l'approximation du premier ordre de Padé des écoulements relatifs à des obstacles coniques quelconques.Des résultats numériques ont été obtenus et publiés par Kopal en 1947 et en 1949. Récemment (1964) Babenko,Voskresienskij,Tjubimo et Rusanov ont publié des tables remarquables relatives aux cônes de révolution inclinés.Un programme est actuellement écrit à l'O.N.E.R.A. par M.Gonidou sous la direction de M.Garreau pour le calcul numérique d'un écoulement conique quelconque.Nos résultats donnent des formules analytiques approchées relatives à ces écoulements et permettent d'avoir des déterminations moins précises mais beaucoup plus rapides.

- Le chapitre VI est consacré à la détermination de la pression au sommet de l'obstacle,lorsque l'écoulement est à trois variables spatiales.Les variations de la masse spécifique à la traversée du choc étant faibles par rapport à celles de la pression,le calcul analogue pour déterminer la masse spécifique n'a pas permis d'obtenir des résultats comparables avec les résultats numériques en ce qui concerne la température au sommet.L'application de la méthode des séries tronquées à la détermination de la température au sommet de l'obstacle n'est pas satisfaisante.

- Ce travail doit le jour à une suggestion qui avait été faite,il y a quelques années, par Monsieur Van Dyke,Professeur à l'Université de Stanford (Californie).Je le prie de trouver ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance.Ma reconnaissance va également à Monsieur Cabannes,Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris,qui en a dirigé la réalisation et qui par ses conseils et ses encouragements

m'a permis de la mener à bien.Je remercie Monsieur le Professeur Casal qui a bien voulu être mon parrain au C.N.R.S et qui a donné le second sujet.Je remercie Monsieur le Professeur Malavard de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ma thèse et Monsieur le Professeur Guiraud qui a bien voulu en faire partie.

- De nombreux résultats numériques contenus dans cette thèse ont été obtenus à l'aide de la calculatrice électronique du Centre de Calcul de la Faculté des Sciences de Marseille.Je remercie le Professeur Morel,Directeur du Centre,de m'avoir donné la possibilité d'obtenir ces résultats.

N.B - L'étude de la formule de Broderick et son extension à la magnétodynamique des fluides ont fait l'objet des publications suivantes :

C.R.Acad.Sc.Paris - t.254 (1572-1574) - 1962
" " " " " - t.257 (372-374) - 1963.

- Les principaux résultats de ce travail sont réunis dans les notes suivantes :

C.R.Acad.Sc.Paris - t.261 (4613-4616) - 1965
" " " " " - t.261 (4983-4986) - 1965
" " " " " - t.262 (1065-1068) - 1966.

Chapitre I

- Enoncé du problème ; exposé de la méthode de Shanks -

L'objet du chapitre est d'écrire les équations du problème étudié et de rappeler les résultats de Shanks relatifs à des transformations rationnelles sur des séries lentement convergentes.

1) Mouvements continus (E),(P) et (R)

Dans le fluide considéré on désigne par $\bar{p}$ $\bar{\rho}$ et $\bar{c}$ les valeurs au repos de la pression, de la masse spécifique et de la célérité du son. γ désignant l'indice adiabatique du gaz, on pose : $\mu^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$. Par rapport à des axes fixés, on désigne par $p(x\,y\,z\,t)$ et $\rho(x\,y\,z\,t)$ la pression et la masse spécifique au point $(x\,y\,z\,t)$. $\vec{V}$ désignant la vitesse au même point on appellera u,v et w ses composantes cartésiennes. On utilisera aussi les grandeurs sans dimensions :

$$P = \frac{p(x\,y\,z\,t)}{\bar{p}} \qquad R = \frac{\bar{\rho}}{\rho(x\,y\,z\,t)}$$

Les mouvements à trois variables d'espace que l'on considérera seront désignés par (E) ; (P) désignera des mouvements plans indépendants de z et (R) les mouvements présentant la symétrie de révolution autour de l'axe des abscisses.

Dans ces conditions les mouvements continus de ce fluide vérifient l'équation fondamentale de la dynamique, l'équation de continuité et l'équation exprimant la conservation de l'énergie. Ils sont par suite régis par le système général suivant :

$$(1\text{-}1\text{-}1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}.\vec{V} + \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \bar{c}^2\,\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}.\dfrac{\partial P}{\partial \vec{r}}.R = 0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial t} + \dfrac{\partial R}{\partial \vec{r}}.\vec{V} - R.\mathrm{Tr}\left(\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}\right) - \varepsilon.R.\dfrac{v}{y} = 0 \\ \dfrac{\partial (P\,R^\gamma)}{\partial \vec{r}}.\vec{V} + \dfrac{\partial (P\,R^\gamma)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

On choisira $\vec{V}(u,v,w)$ et $\vec{r}(x,y,z)$ ou $\vec{V}(u,v)$ et $\vec{r}(x,y)$ dans les cas (E) et (P) avec la valeur commune $\varepsilon=0$. De même on choisira $\varepsilon=1$ avec $\vec{V}(u,v)$ et $\vec{r}(x,y)$ dans le cas (R). On utilisera les deux équations suivantes obtenues par élimination de R :

$$(1\text{-}1\text{-}2)\qquad (E) : u\,P_x + v\,P_y + w\,P_z + \frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}(u_x+v_y+w_z)P + P_t = 0$$

$$(1\text{-}1\text{-}3)\qquad (R) : u\,P_x + v\,P_y + \frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}\left(u_x + v_y + \frac{v}{y}\right)P + P_t = 0$$

dans lesquelles les indices sont des indices de dérivation.

La forme de la solution du système aux dérivées partielles (1-1-1) dépend essentiellement de la nature des conditions aux limites imposées. Ici ces conditions sont générales et dissymétriques car relatives à une surface fixe qui est l'obstacle, et une surface variable qui sera celle du choc. On supposera que dans les domaines où l'on opère les fonctions rencontrées sont dérivables autant de fois que cela est nécessaire, sauf mention spéciale dans des cas particuliers.

2) Conditions aux limites des phénomènes de choc.

On ne considérera ici que les chocs résultant de la présence d'un obstacle solide placé dans un fluide, dans l'hypothèse où son mouvement est réduit à une translation rectiligne quelconque. Les conditions aux limites classiques des phénomènes de choc sont indépendantes du nombre de variables utilisées. On les écrira dans le cas des mouvements (E) seulement. L'équation de l'obstacle est choisie sous la forme :

$$x = f(y,z) + \xi(t)$$

avec les conditions : $\xi(0) = 0$ et $\xi_t(0) > 0$.

Lorsque les conditions initiales du mouvement et le choix de l'obstacle entrainent l'existence d'une onde de choc, son équation sera :

$$x = F(y,z,t)$$

Si l'on désigne par c la célérité du son au point (x,y,z,t) on sera amené à utiliser le nombre de Mach normal en un point de la surface du choc. Sa valeur est définie par :

$$M(y,z,t) = \frac{F_t(y,z,t)}{c\sqrt{1 + F_y^2 + F_z^2}} \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, il sera désigné par M seulement. Si les mouvements sont stationnaires, on utilisera aussi le nombre de Mach de l'écoulement amont désigné par $\mathcal{M}$.

On ne considérera que des écoulements sans viscosité. Par suite la condition de glissement du fluide sur la paroi de l'obstacle se traduit par l'équation suivante (pour $x = f(y,z) + \xi(t)$) :

$$\vec{V}.\vec{N}_f = \xi'(t) \qquad \text{avec : } \vec{N}_f = \begin{vmatrix} 1 \\ -f_y \\ -f_x \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}2\text{-}2)$$

Si l'on désigne par q_n et q_t les composantes tangentielles et normales de $\vec{V}$ en un point de la surface du choc et si D est la grandeur de la vitesse de déplacement de l'onde de choc, les équations classiques des phénomènes de choc se traduisent par le système suivant (pour $x = F(y,z,t)$) :

$$(1\text{-}2\text{-}3)\qquad \begin{cases} \rho(q_n - D)\vec{V} + \vec{N}_F p = \rho^o(q_n^o - D)\vec{V}^o + \vec{N}_F p^o \\ \rho(q_n - D) = \rho^o(q_n^o - D) \\ \rho(q_n^2 + q_t^2)(q_n - D) + 2p\,q_n + \dfrac{2}{\gamma-1}p(q_n - D) = \rho^o(q_n^{o2} + q_t^{o2})(q_n^o - D) + \\ \qquad\qquad + 2\,p^o q_n^o + \dfrac{2}{\gamma-1}\,p^o(q_n^o - D) \end{cases}$$

dans lequel l'indice zéro indique que la quantité correspondante est prise dans le fluide au repos.

L'ensemble des conditions aux limites (-2-2) et (1-2-3) jointes au système (1-1-1) des mouvements continus définissant les phénomènes de choc étudiés ici, lorsque les conditions d'existence de ces derniers sont remplies.

3) Chocs créés par le départ d'un obstacle.

Les résultats les plus nombreux concernant les problèmes de chocs sont ceux relatifs aux écoulements stationnaires et aux chocs attachés.Cela tient au fait que ces chocs peuvent être déterminés à partir de la pointe de l'obstacle par la résolution de problèmes locaux.

Il n'en est pas de même pour les chocs détachés et les difficultés rencontrées proviennent du problème global que l'on a à résoudre.Si la position de l'onde est connue,les conditions aux limites (1-2-3) permettent de calculer les caractéristiques de l'écoulement sur la face aval de l'onde.Il est classique,d'après les théorèmes d'existence de Cauchy-Kovaleska,que l'on peut construire des séries de Taylor convergentes des deux côtés de l'onde de choc dans un domaine qui ne se réduit pas à zéro.Ces séries permettent donc de caractériser l'écoulement dans un certain intervalle entourant la surface du choc.Mais l'inconvénient majeur est que l'on ne peut pas déterminer de la même façon l'écoulement dans le voisinage de l'obstacle,la condition aux limites correspondante (1-2-2) étant insuffisante pour qu'il en soit ainsi.

Pratiquement d'ailleurs,l'onde de choc est inconnue.Sa détermination théorique présente peu d'intérêt pour les utilisateurs.Pour ces derniers ce sont en effet des problèmes dits directs qui se posent : on se donne la forme de l'obstacle ou,ce qui peut revenir au même,la distribution des vitesses à sa surface et l'on cherche le choc résultant ainsi que l'écoulement aval correspondant.La difficulté de résolution de ces problèmes provient du fait que la frontière des conditions aux limites relatives aux équations du mouvement est mobile puisqu'elle se réduit

à la surface du choc.

Si au contraire on se donne a priori des formes de surfaces des chocs, le problème est dit inverse. Comme on l'a dit, il existe une solution de Taylor dont on peut effectuer le prolongement au voisinage de la surface. Mais en général le domaine de ce prolongement est inconnu. De plus le prolongement serait intéressant si l'on pouvait ainsi atteindre l'obstacle. Mais des questions délicates d'instabilité peuvent alors se poser dans les résolutions numériques de ces problèmes.

En fait quelle que soit la méthode (directe ou inverse), si l'on dénombre les données et les inconnues des problèmes de chocs, on s'aperçoit que les conditions aux limites classiques que l'on a considérées laissent subsister une indétermination qui est de l'ordre d'une fonction inconnue.

Cabannes a pu ainsi considérer différemment le problème direct des chocs détachés en utilisant d'une part le choc résultant du départ d'un obstacle dans un fluide au repos, et d'autre part en utilisant le caractère instationnaire au départ de l'obstacle pour l'écoulement correspondant.

Si l'on suppose donc l'obstacle et le fluide immobiles avant l'instant $t = 0$, si l'on admet que le champ des vitesses initiales n'est pas nul, le mouvement ultérieur de l'obstacle donne lieu à la formation immédiate d'une onde de choc. On supposera les conditions initiales réalisées pour qu'il en soit ainsi. Dans ces conditions, dans le voisinage de l'instant initial, la détermination de la surface de choc présente un caractère local.

Ces hypothèses permettent de simplifier les seconds membres de (1-2-3). Par projection sur les axes fixes, ce système se résout sous la forme suivante :

$$(1\text{-}3\text{-}1)\qquad \begin{cases} x = F(y\,z\,t) \\ \vec{V}(x\,y\,z\,t) = (1-\mu^2)\left[\dfrac{F'_t(y\,z\,t)}{1+F'^2_y+F'^2_z} - \dfrac{\bar{c}^2}{F'_t(y\,z\,t)}\right]\vec{N}_F \\ P(x\,y\,z\,t) = \dfrac{[F'_t(y\,z\,t)]^2}{\bar{c}^2(1+F'^2_y+F'^2_z)}(1+\mu^2)-\mu^2 \\ R(x\,y\,z\,t) = \dfrac{\bar{c}^2(1+F'^2_y+F'^2_z)}{[F'_t(y\,z\,t)]^2}(1-\mu^2)+\mu^2 \end{cases}$$

De même les conditions (1-2-2) se traduisent par le système :

$$(1\text{-}3\text{-}2)\qquad \begin{cases} x = f(y,z) + \xi(t) \\ \\ u(x,y,z,t) - f_y.v(x,y,z,t) - f_z.w(x,y,z,t) = \xi_t(t) \end{cases}$$

Comme il a été précisé,si l'on ajoute à ces deux systèmes le système (1-1-1) des équations du mouvement,il demeure indéterminé.Mais il est possible de lever cette indétermination en vertu de l'hypothèse du départ de l'obstacle à partir du repos. Cette hypothèse entraine en effet l'équation supplémentaire :

$$(1\text{-}3\text{-}3)\qquad F(y,z,o) = f(y,z)$$

l'obstacle n'entrant en mouvement dans le fluide partout au repos qu'à partir de l'instant t = 0. L'ensemble formé par (1-1-1) (1-3-1) (1-3-2) et (1-3-3) admet alors une solution analytique unique.Dans un voisinage de l'instant initial,il sera donc possible de considérer les développements qui seront valables dans un intervalle nécessairement non nul à partir de la valeur t = 0.Les procédés de caractère local pour l'étude des chocs attachés à une pointe peuvent alors être étendus par ce procédé aux chocs détachés.

Les développements de Taylor ont l'avantage que leurs coefficients peuvent être calculés aussi loin que l'on voudra.Mais ils ont l'inconvénient de la longueur des calculs.Pour les chocs détachés notamment,même une approximation du sixième ordre ne peut être considérée comme satisfaisante.

Par des transformations mathématiques portant sur des séries entières écrites jusqu'au quatrième ordre,il nous a été toutefois possible d'accélérer la convergence de ces séries.Cela conduit à considérer des développements rationnels comme approximation des grandeurs caractéristiques de l'écoulement,au lieu des développements entiers des mêmes grandeurs.Leur origine est dans des transformations non linéaires que l'on peut définir sur des suites de nombres.

4) <u>Sur les transformations de Shanks</u>.

Ces transformations applicables aux séries lentement convergentes et même divergentes sont définies sur des suites numériques A_n (n = 0,1,...). Si l'on pose : $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n$ et si k est un entier positif arbitraire,on associe à la suite A_n la suite $B_{k,n}$ définie (pour n = k,k+1,k+2,...) par la relation :

$$(1\text{-}4\text{-}1)\qquad e_{k,n} = \frac{\begin{vmatrix} A_{n-k} & \cdots & A_{n-1} & A_n \\ \Delta A_{n-k} & \cdots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \Delta A_{n-k+1} & \cdots & \Delta A_n & \Delta A_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta A_{n-1} & \cdots & \vdots & \Delta A_{n+K-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \Delta A_{n-k} & \cdots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \Delta A_{n-k+1} & \cdots & \Delta A_n & \Delta A_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta A_{n-1} & \cdots & \vdots & \Delta A_{n+k-1} \end{vmatrix}}$$

pour toutes les valeurs n'annulant pas le dénominateur. Pour ces valeurs on pose alors : $B_{k,n} : \infty$ et on étend la transformation au cas k = 0 en posant : $B_{o,n} = A_n$.
Enfin pour les valeurs de n rendant la fraction indéterminée on pose :

$$(1\text{-}4\text{-}2)\qquad B_{k,n} = B_{k-1,n}.$$

En particulier pour k = 1 on aura :

$$(1\text{-}4\text{-}3)\qquad B_{1,n} = \frac{A_{n+1}.A_{n-1} - A_n^2}{A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n}$$

Si l'on désigne ces transformations dites d'ordre k par : $B_{k,n} = e_k(A_n)$ elles ne sont évidemment pas linéaires, mais si C est une constante on vérifie que :

$$(1\text{-}4\text{-}4)\qquad \begin{cases} e_k(C.A_n) = C.e_k(A_n) \\ e_k(C + A_n) = C + e_k(A_n) \end{cases}$$

De la définition il résulte une utilisation assez souple de ces transformations qui dépend de l'ordre k et du nombre de termes que l'on considère dans la suite A_n, puisque n ≥ k.
De plus ces transformations peuvent s'itérer en posant :

$$(1\text{-}4\text{-}5)\qquad \begin{cases} B_{k,n} = e_k(A_n) & n \geq k \\ C_{k,n} = e_k(B_{k,n}) = e_k^2(A_n) & n \geq 2k \\ D_{k,n} = e_k(C_{k,n}) = e_k^3(A_n) & n \geq 3k \\ E_{k,n} = e_k(D_{k,n}) = e_k^4(A_n) & n \geq 4k \end{cases}$$

Cela permet de définir en particulier les transformations dites diagonales pour $n = k$.

Par exemple pour $k = 1$ la tableau des transformations itérées possibles s'écrit (en supprimant le premier indice) :

(1-4-6)

$$\begin{array}{|llll} A_o & & & \\ A_1 & B_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

De même pour $k = 2$ le tableau des transformations itérées de B s'écrit :

(1-4-7)

$$\begin{array}{|llll} B_{oo} & B_{o1} & B_{o2} & B_{o3}\cdots\cdots\cdots \\ & B_{11} & B_{12} & B_{13}\cdots\cdots\cdots \\ & & B_{22} & B_{23}\cdots\cdots\cdots \\ & & & B_{33}\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Par exemple si l'on considère une suite de 5 termes : A_o, A_1, A_2, A_3, A_4 définie par : $A_p = \sum_{i=o}^{i=p} a_i x^i$, les seules transformations ne faisant intervenir que les coefficients de ces termes sont :

a) au premier ordre : $e_1(A_1), e_1(A_2), e_1(A_3)$.

b) au second ordre : $e_2(A_2)$.

Pour les transformations itérées on pourra considérer de même e_1^2 relative aux trois termes : $e_1(A_1)$, $e_1(A_2)$ et $e_1(A_3)$.

Ces transformations permettent d'accélérer la convergence des séries lentement convergentes et d'associer des séries convergentes à des séries initialement divergentes. Si l'on applique la transformation du premier ordre et ses itérées à la série classique de Leibnitz : $\pi = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + \ldots\ldots$

en choisissant $A_o = 4$, $A_1 = 4(1-1/3)$...etc....,on peut voir que :

$A_9 = 3,0418396$. Mais si l'on calcule la transformation itérée du $3^{ème}$ ordre E, on s'aperçoit que : $E_5 = 3,1415927$. Or E_5 ne dépend que de la connaissance de A_n pour

n = 1,2,...9 .Cela montre une réduction considérable des calculs numériques nécessaires pour obtenir par ce procédé une telle approximation.Evidemment il y a des conditions assez strictes d'application de ces transformations et la difficulté provient de l'arbitraire dans le choix de l'une parmi toutes ces transformations.
Si on applique ces transformations aux séries de la forme :

$$A_n = \sum_{p=1}^{p=n} a_p x^p$$

on peut vérifier que :

$$(1\text{-}4\text{-}8)\quad e_k(\ _n) = \frac{\begin{vmatrix} A_{n-k} & , & A_{n-k+1} & \cdots\cdots & A_n \\ a_{n-k+1}x^{n-k+1} & , & & \cdots\cdots & a_{n+1}x^{n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n x^n & , & & \cdots\cdots & a_{n+k}x^{n+k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & , & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ a_{n-k+1}x^{n-k+1} & , & & \cdots\cdots & a_{n+1}x^{n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n x^n & , & & \cdots\cdots & a_{n+k}x^{n+k} \end{vmatrix}}$$

qui représente une fraction rationnelle approximant la somme A_n.
Si l'on considère la série :

$$\mathrm{Log}(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

et que l'on choisisse les transformations diagonales on trouve :

$$B_{oo} = 0 \qquad B_{11} = \frac{2x}{2+x} \qquad B_{22} = \frac{6x + 3x^2}{6 + 6x + x^2} \quad \text{etc} \ldots\ldots$$

qui approchent d'une certaine façon la fonction Log(1+x).
On voit donc que l'application de ces transformations aux premiers termes du développement en série d'une grandeur inconnue,permet à partir de la connaissance d'un nombre faible de termes d'atteindre sous forme de fraction rationnelle une approximation de cette grandeur inconnue.
L'arbitraire dans le choix de la transformation convenable peut être levé par des

considérations sur les propriétés de la grandeur inconnue, ce qui permet d'envisager l'emploi de ces développements pour une classe assez large de problèmes.

Chapitre II

- Calcul préliminaire des dérivées de la fonction F(y,z,t)

Les développements entiers ou fractionnaires des grandeurs caractérisant les écoulements avec chocs font intervenir les dérivées de ces grandeurs par rapport aux variables y,z et t.Ce chapitre a pour but la calcul des 34 dérivées $\frac{\partial^{p+q+r} F(y\,z\,t)}{\partial y^p \partial z^q \partial t^r}$ $(p+q+1 \leq 4)$ dans des conditions qui seront précisées.Il est conduit simultanément pour les mouvements (E) et (R),les mouvements (P) résultant immédiatement des mouvements (E).

1) Notations

a) Grandeurs liées à l'obstacle :

$$\begin{cases} A = f'_y f''_{y^2} + f'_z f''_{yz} \\ C = f'_y f'''_{y^3} + f'_z f'''_{zy^2} \\ E = f'_y f^{IV}_{y^4} + f'_y f^{IV}_{zy^3} \\ U = 1 + f'^2_y + f'^2_z \end{cases} \qquad \begin{cases} B = f'_z f''_{z^2} + f'_y f''_{zy} \\ D = f'_z f'''_{z^3} + f'_y f'''_{yz^2} \\ F = f'_z f^{IV}_{z^4} + f'_y f^{IV}_{yz^3} \\ G = f'_y f'''_{y^2 z} + f'_z f'''_{yz^2} \end{cases}$$

(2-1-1)
$$\begin{cases} \Omega = A f'_y + B f'_z \\ \Omega_1 = C f'^2_y + D f'^2_z \\ \Omega_2 = E f'^3_y + F f'^3_z \end{cases}$$

b) Grandeurs liées au choc et à l'obstacle :

$$\Theta(y\,z\,t) = 1 + f'_y F'_y + f'_z F'_z$$

(2-1-2)
$$H(y\,z\,t) = \frac{F'_t}{1 + F'^2_y + F'^2_z} - \frac{\bar{\sigma}^2}{F'_t} \qquad K(y\,z\,t) = \frac{(F'_t)^2}{1 + F'^2_y + F'^2_z} \qquad K(y\,z\,t).J(y\,z\,t) = 1$$

$$A_x(x\,y\,z\,t) = u'_x - v'_x f'_y - w'_x f'_z \qquad \text{pour} \begin{cases} x = F(y\,z\,t) \\ x = f(y\,z) + \xi(t) \end{cases}$$

c) Notations matricielles ou vectorielles :

$$\vec{r} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \qquad \vec{s} = \begin{vmatrix} t \\ y \\ z \end{vmatrix} \qquad \vec{N}_f = \begin{vmatrix} 1 \\ -f'_y \\ -f'_z \end{vmatrix} \qquad \vec{N}_F = \begin{vmatrix} 1 \\ -F'_y \\ -F'_z \end{vmatrix}$$

$$|H'| = \begin{vmatrix} H'_t \\ H'_y \\ H'_z \end{vmatrix} \qquad |F'| = \begin{vmatrix} F'_t \\ F'_y \\ F'_z \end{vmatrix} \qquad |f'| = \begin{vmatrix} \xi'_t(t) \\ f'_y(y\,z) \\ f'_z(y\,z) \end{vmatrix} \tag{2-1-3}$$

$$|X| = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \quad \text{avec : } a = \frac{1}{1 + F'^2_y + F'^2_z} + \frac{\overline{c}^2}{F'^2_t} \qquad b = \frac{-2\,F'_t F'_y}{(1 + F'^2_y + F'^2_z)^2}$$

$$c = \frac{-2\,F'_t F'_z}{(1 + F'^2_y + F'^2_z)^2}$$

Transposition : $|\overline{X}| = |a\ b\ c|$ Diagonalisation : $|\underline{X}| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$

d) Matrice $|A'|$:

$$|A'| = \begin{vmatrix} A_t \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} \quad \text{avec : } |\overline{A'}| = \overleftarrow{N_f} \circ \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}} \text{ .Notation condensée : } |\overline{A'}| = \frac{\partial A}{\partial \vec{s}}$$

e) Dérivation des matrices-colonnes :

$$|F'|^{(n)}_{\alpha^n} = \begin{vmatrix} F^{(n+1)}_{t\alpha^n} \\ F^{(n+1)}_{y\alpha^n} \\ F^{(n+1)}_{z\alpha^n} \end{vmatrix} \qquad \text{pour tout scalaire } \alpha$$

Position et vitesse initiales des chocs

D'après les hypothèses relatives au départ d'un obstacle dans un fluide au repos, l'obstacle placé dans le fluide n'entre en mouvement qu'à partir de la valeur t = 0. Par conséquent les positions initiales de l'obstacle et du choc étant confondues, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} F(y\,z\,o) = f(y\,z) \\ \dfrac{\partial^{p+q} F(y\,z\,o)}{\partial y^p \partial z^q} = \dfrac{\partial^{p+q} f(yz)}{\partial y^p \partial z^q} \end{cases} \tag{2-2-1}$$

d'après le choix des axes.

Pars suite les dérivées partielles de $F(y\,z\,t)$ par rapport à y et z sont déterminées à l'instant initial par la forme de l'obstacle seulement.

Des équations (1-3-4) et (1-3-5) on déduit alors pour t = 0 le système :

$$
\left\{
\begin{aligned}
u &= (1-\mu^2)\left[\frac{F'_t(y\,z\,o)}{U} - \frac{\overline{o}^2}{F'_t(y\,z\,o)}\right] \\
v &= -(1-\mu^2)\left[\frac{F'_t(y\,z\,o)}{U} - \frac{\overline{o}^2}{F'_t(y\,z\,o)}\right] f'_y \\
w &= -(1-\mu^2)\left[\frac{F'_t(y\,z\,o)}{U} - \frac{\overline{o}^2}{F'_t(y\,z\,o)}\right] f'_z \\
u - v\,f'_y - w\,f'_z &= \xi'_t(o)
\end{aligned}
\right. \qquad (2\text{-}2\text{-}2)
$$

où les quantités u,v et w ont la même valeur.Par élimination on en déduit la valeur suivante :

$$
F'_t(y\,z\,o) = \frac{\xi'_t(o)}{2(1-\mu^2)} + \sqrt{\left[\frac{\xi'_t(o)}{2(1-\mu^2)}\right]^2 + \overline{o}^2\,U} \qquad (2\text{-}2\text{-}3)
$$

indépendante du nombre de variables d'espace utilisées.La valeur du nombre de Mach normal à l'instant initial est donc :

$$
M(y\,z\,o) = \frac{F'_t(y\,z\,o)}{\overline{o}\sqrt{U}} \qquad (2\text{-}2\text{-}4)
$$

d'où résulte l'expression de la vitesse de déplacement des chocs au départ.
Les valeurs de V,P et R sur la surface du choc à l'instant initial se déduisent de (1-3-4) et s'écrivent :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\vec{V} &= \frac{1-\mu^2}{\sqrt{U}}\left[\frac{M^2-1}{M}\right]\vec{N}_f\,\overline{c} \\
P &= (1+\mu^2)\,M^2 - \mu^2 \\
R &= \frac{\mu^2 M^2 + 1 - \mu^2}{M^2}
\end{aligned}
\right. \qquad (2\text{-}2\text{-}5)
$$

Ces résultats ne dépendent pas des équations du mouvement mais seulement des conditions aux limites choisies.Il faut remarquer que le calcul des mêmes grandeurs à un instant quelconque est indéterminé car les équations du mouvement qui s'ajoutent aux précédentes, contiennent les dérivées premières pour nouvelles inconnues.

3) Calcul des coefficients du second ordre

Des hypothèses d'analyticité il résulte que les équations du mouvement et les conditions aux limites considérées à un instant quelconque sont dérivables par rapport à $\vec{s}$. On obtient alors 23 équations scalaires à 26 inconnues à savoir : les 20 dérivées secondes de V, P et R considérées pour $x = F(y\,z\,t)$ et $x = f(y\,z) + \xi(t)$ et les 6 dérivées secondes de $F(yzt)$ dont 3 sont déjà déterminés. Le problème est par suite indéterminé quel que soit $t > 0$. Mais si l'on considère la valeur $t = 0$ les relations (2-2-1) ramènent le nombre des inconnues à 23 et leur détermination devient possible. Les notations du premier paragraphe permettent d'abord d'écrire (1-3-4) sous la forme suivante :

$$(2\text{-}3\text{-}1)\qquad \begin{cases} x = F(y\,z\,t) \\ \vec{V}(x\,y\,z\,t) = (1-\mu^2)\,H(y\,z\,t).\vec{N}_F \\ P(x\,y\,z\,t) = \dfrac{1+\mu^2}{\bar{c}^2}\,K(y\,z\,t) - \mu^2 \\ R(x\,y\,z\,t) = (1-\mu^2)\,\bar{c}^2\,J(y\,z\,t) + \mu^2 \end{cases}$$

Ensuite les expressions (2-1-2) permettent de calculer les éléments des matrices $|H'|$ et $|\overline{K'}| = |K'_t, K'_y, K'_z|$ en fonction de $\bar{c}$ et $F(y\,z\,t)$ seulement :

$$(2\text{-}3\text{-}2)\qquad \begin{cases} |H'| = \left\{\dfrac{1}{1+F'^2_y+F'^2_z} + \dfrac{\bar{c}^2}{F'^2_t}\right\}.|F'|'_t - \dfrac{2F'_t}{(1+F'^2_y+F'^2_z)^2}\begin{vmatrix} F'_yF''_{yt}+F'_zF''_{zt} \\ F'_yF''_{y^2}+F'_zF''_{zy} \\ F'_yF''_{zy}+F'_zF''_{z^2} \end{vmatrix} \\ |K'| = \left\{\dfrac{2F'_t}{(1+F'^2_y+F'^2_z)}\right\}.|F'|'_t - \dfrac{2(F'_t)^2}{(1+F'^2_y+F'^2_z)^2}\begin{vmatrix} F'_yF''_{yt}+F'_zF''_{zt} \\ F'_yF''_{y^2}+F'_zF''_{zy} \\ F'_zF''_{zy}+F'_zF''_{z^2} \end{vmatrix} \end{cases}$$

Ces équations sont donc linéaires par rapport aux dérivées secondes de $F(y\,z\,t)$. Enfin les équations dérivées par rapport à $\vec{s}$ des deux premières équations de (2-3-1) déterminent le système :

$$(2\text{-}3\text{-}3)\qquad \begin{cases} x = F(y\,z\,t) \\ \left|\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}\right|.|F'| + \left|\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}\right| = (1-\mu^2)\left|\vec{N}_F\right|.|H'| + (1-\mu^2)\left|\dfrac{\partial(\vec{N}_F)}{\partial \vec{s}}\right|.H \end{cases}$$

et les deux dernières conduisent aux systèmes :

$$(2\text{-}3\text{-}4)\qquad \begin{cases} x = F(y\,z\,t) \\ P'_x.|F'| + \dfrac{\overline{\partial P}}{\partial \vec{s}} = \dfrac{1+\mu^2}{\bar{c}^2}\,|K'| \end{cases} \qquad (2\text{-}3\text{-}5)\qquad \begin{cases} x = F(y\,z\,t) \\ R'_x.|F'| + \dfrac{\overline{\partial R}}{\partial \vec{s}} = (1-\mu^2)\bar{c}^2\,|J'| \end{cases}$$

dans lesquels $|J'|$ est une matrice analogue à $|K'|$. Les définitions (2-1-4) donnent en particulier $|\overline{A'}| = \vec{N}_F.\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}$. Si l'on dérive l'équation (1-3-2) par

rapport à $\vec{s}$,on fait intervenir les éléments de la matrice $|A'|$ ainsi que A_x.
Cela conduit au système :

$$(2\text{-}3\text{-}6)\qquad \begin{cases} x = f(y\,z) + \xi(t) \\ A_x|f'| + \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}.\vec{N}_f = V|f'|'_y + w|f'|'_z + |f'|'_t \end{cases}$$

Les équations (2-3-2) à (2-3-6) ne résultant que des conditions aux limites sont indépendantes du nombre de variables utilisées et sont vraies quel que soit t.

— Si l'on se place alors à l'instant t = 0 on obtient :

$f(y\,z) = F(y\,z\,o)$ $\qquad F'_y F''_{y^2} + F'_z F''_{zy} = A \qquad F'_z F''_{z^2} + F'_y F''_{zy} = B$ et $1 + F'^2_y + F'^2_z = U$.

Par conséquent les équations précédentes contiennent les mêmes quantités :

$A_x, |F'|'_t, \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}, \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}, \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{s}}$ et $\dfrac{\partial R}{\partial \vec{s}}$ .On en déduit les systèmes suivants :

$$(2\text{-}3\text{-}7)\qquad \begin{cases} |H'| = \left\{\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{\sigma^2}{F'^2_t}\right\}.|F'|'_t - \dfrac{2\,F'_t}{U^2} \times \begin{vmatrix} f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt} \\ A \\ B \end{vmatrix} \\ |K'| = \dfrac{2\,F'_t}{U}.|F'|'_t - \dfrac{2(F'_t)^2}{U^2} \times \begin{vmatrix} f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt} \\ A \\ B \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$(2\text{-}3\text{-}8)\qquad \left|\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}\right|.|F'| + \left|\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}\right| = (1 - \mu^2)\left|\vec{N}_f\right|.|H'| + (1 - \mu^2)\left|\frac{\partial(\vec{N}_f)}{\partial \vec{s}}\right| H$$

$$(2\text{-}3\text{-}9)\qquad P'_x|F'| + \frac{\partial P}{\partial \vec{s}} = \frac{1 + \mu^2}{\sigma^2}|K'| \qquad R'_x|F'| + \frac{\partial R}{\partial \vec{s}} = (1 - \mu^2)\sigma^2|J'|$$

$$(2\text{-}3\text{-}10)\qquad A_x \begin{vmatrix} \xi'_t(o) \\ f'_y \\ f'_z \end{vmatrix} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}.N_f = V \begin{vmatrix} 0 \\ f''_{y^2} \\ f''_{zy} \end{vmatrix} + W \begin{vmatrix} 0 \\ f''_{yz} \\ f''_{z^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi''_{t^2}(o) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Si l'on élimine les 9 dérivées $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}$ et $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}$ initiales entre (2-3-8) et (2-3-10) on obtient :

$$(2\text{-}3\text{-}11)\qquad (1-\mu^2)\begin{vmatrix} H'_y \\ H'_z \end{vmatrix} U + (1-\mu^2)\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} H = \begin{vmatrix} f''_{y^2} & f''_{zy} \\ f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V \\ W \end{vmatrix}$$

Dans ces conditions la première équation (2-3-7),la valeur de H en fonction de M par (2-2-4) et la relation (2-2-5) déterminent la solution suivante :

$$(2\text{-}3\text{-}12)\qquad F''_{ty}(y\,z\,o) = \frac{2M\bar{\sigma}}{M^2+1} \circ \frac{A}{\sqrt{U}} \qquad F''_{zt}(y\,z\,o) = \frac{2M\bar{\sigma}}{M^2+1} \circ \frac{B}{\sqrt{U}}$$

Ces expressions obtenues sans les équations du mouvement sont donc valables pour les mouvements (E) (P) et (R).

4) Valeurs de $A_x(x\,y\,z\,o)$ et F''_{t^2}.

A l'instant t = 0,de la première équation du système (1-1-1) définissant les mouvements (E) on déduit l'équation :

$$(2\text{-}4\text{-}1)\qquad \frac{\partial A}{\partial \vec{r}} V + A'_t + \bar{c}^{-2}\,\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} R \frac{\partial P}{\partial \vec{r}} \vec{N}_f = 0$$

où $\frac{\partial A}{\partial \vec{r}}$ a une signification analogue à $\frac{\partial A}{\partial \vec{s}}$ .D'autre part si l'on multiplie (2-3-8) par $\vec{N}_f$ on en déduit l'équation :

$$(2\text{-}4\text{-}2)\qquad \frac{\partial A}{\partial \vec{s}} = (1-\mu^2)U|H'| + (1-\mu^2)\,H \begin{vmatrix} f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt} \\ A \\ B \end{vmatrix} - A_x \circ |F'|$$

D'après l'expression (2-3-7) ces deux équations permettent d'exprimer $\frac{\partial A}{\partial \vec{r}}$ et $\frac{\partial A}{\partial \vec{s}}$ en fonction de $|F'|'_t$,de $\frac{\partial P}{\partial \vec{r}}$ et de $|F'|$ qui est connu.Or si l'on considère l'équation (1-1-2) d'une part,et les équations (2-3-9) et (2-3-7) d'autre part,on détermine le système :

$$(2\text{-}4\text{-}3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial \vec{r}} \vec{V} + \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{1+\mu^2}{1-\mu^2} P.\mathrm{Tr}\left(\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}\right) = 0 \\ P'_x.|F'| + \dfrac{\partial P}{\partial \vec{s}} = \dfrac{2(1+\mu^2)}{\bar{c}^2}\,\dfrac{1}{U}\,|F'|'_t - \dfrac{2(1+\mu^2)}{\bar{c}^2} \circ \dfrac{(F'_t)^2}{U^2} \begin{vmatrix} f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt} \\ A \\ B \end{vmatrix} \end{cases}$$

Si l'on remarque que $\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} = \vec{N}_f \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}$ et $\frac{\partial A}{\partial \vec{s}} = \vec{N}_f \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}$, les quatre équations précédentes

déterminent donc $\frac{\partial P}{\partial \vec{r}}$, $\frac{\partial P}{\partial \vec{s}}$, $\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$ et $\frac{\partial V}{\partial \vec{s}}$ en fonction de $|F'|$ et $|F'|'_t$.

Si l'on développe maintenant les équations extraites de (2-3-7) (2-3-8) et (2-3-10) qui contiennent $F''_{t^2}(0)$ et $A'_x(x\,y\,z\,o)$ on obtient le système :

$$
(2\text{-}4\text{-}4)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}\, F''_{t^2}(0) + \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}} = (1-\mu^2) H'_t\, \vec{N}_f + (1-\mu^2)\, H\, \dfrac{\partial (\vec{N}_f)}{\partial \vec{s}} \\[2ex]
H'_t = \left\{ \dfrac{f'_1}{U} + \dfrac{\pm c^2}{F'^2_t} \right\} F''_{t^2}(0) - \dfrac{2\,F'_t}{U} \left(f'_y\, F''_{yt} + f'_z\, F''_{zt} \right) \\[2ex]
A_x\,(x\,y\,z\,o).\xi'_t(0) + A'_t(x\,y\,z\,o) = \xi''_{t^2}(0)
\end{cases}
$$

En vertu des valeurs précédentes de $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}$ et $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}$ il déterminera $F''_{t^2}(0)$ et $A'_x(x\,y\,z\,o)$ pour les mouvements (E). Si l'on utilise la valeur de $|F'|$ et les expressions qui interviennent dans ces développements en fonction des données on obtient, toutes réductions faites, :

$$
(2\text{-}4\text{-}5)\qquad
\begin{cases}
[F''_{t^2}(y\,z\,o)]_{(E)} = \dfrac{M^2(M^2-1)}{(1-\mu^2)(\Delta)}\, \xi''_{t^2}(0) + \bar{o}^{-2}\, \dfrac{(A_2)}{(\Delta)} \cdot \dfrac{2\,\Omega - U(f''^2_y + f''^2_z)}{U} \\[2ex]
\qquad\qquad + \bar{o}^{-2}\, \dfrac{(B_2)}{(\Delta)(M^2+1)} \cdot \dfrac{\Omega}{U} \\[2ex]
[A_x(x\,y\,z\,o)]_{(E)} = \dfrac{-\,\xi''_{t^2}(0)}{\bar{o}(R)M} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{U}} + \dfrac{1-\mu^2}{\bar{o}} \cdot \dfrac{M^2+1}{(R)M^3} \cdot \dfrac{[F''_{t^2}(y\,z\,o)]_{(E)}}{\sqrt{U}} \\[2ex]
\qquad\qquad - (1-\mu^2)\, \dfrac{M^2+1}{(R)M^2} \cdot \dfrac{f'_y\, F''_{yt}(y\,z\,o) + f'_z F''_{zt}(y\,z\,o)}{U}
\end{cases}
$$

où (R) est la valeur définie par (2-2-5) et où l'on a posé :

$$
(2\text{-}4\text{-}6)\qquad
\begin{cases}
(\Delta) = (3\,\mu^2+1)\,M^4 - (2\,\mu^2-3)\,M^2 - \mu^2 \\
(A_2) = -(\mu^2 M^2 + 1 - \mu^2)[(1+\mu^2)M^2 - \mu^2](M^2-1) \\
(B_2) = (\mu^4-\mu^2)\,M^8 + (-2\,\mu^4+3\,\mu^2+1)M^6 + (3\,\mu^4+2\,\mu^2-1)\,M^4 \\
\qquad + (-2\,\mu^4+\mu^2-1)\,M^2 - (1-\mu^2)^2
\end{cases}
$$

Les formules relatives aux mouvements (P) sont analogues mais indépendantes de τ.

- Cas des mouvements (R).

On reconsidère les équations précédentes avec les variables y et t seulement. Elles demeurent valables à l'exception du système (2-4-3). En effet dans ces mouvements (1-1-2) est remplacé par (1-1-3) et (2-4-3) s'écrit :

$$(2\text{-}4\text{-}7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial \vec{r}}\vec{V} + \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{1+\mu^2}{1-\mu^2} P.\mathrm{Tr}\left(\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}\right) + \dfrac{1+\mu^2}{1-\mu^2} P \dfrac{v}{y} = 0 \\ P'_x |F'| + \dfrac{\partial P}{\partial \vec{s}} = \dfrac{2(1+\mu^2)}{\bar{o}^2} |F'|'_t - \dfrac{2(1+\mu^2)}{\bar{o}^2} \dfrac{(F'_t)^2}{U^2} \cdot \begin{vmatrix} f'_y & F''_{yt} \\ f'_z & F''_{zt} \end{vmatrix} \end{cases}$$

D'autre part les notations relatives à l'obstacle se simplifient : B = 0, Ω , U et $2\Omega - U(f''_{y^2} + f''_{z^2})$ sont remplacés par $f'^2 f''$, $1 + f'^2$ et $f''(f'^2-1)$ respectivement. On obtient alors les valeurs suivantes :

$$(2\text{-}4\text{-}8)\quad \begin{cases} [F''_{t^2}(y,o)]_{(R)} = \dfrac{M^2(M^2-1)}{(1-\mu^2)(\Delta)} \xi''_{t^2}(0) + \bar{o}^2 \dfrac{(A_z)}{(\Delta)} \cdot \dfrac{f''(f'^2-1)}{1+f'^2} + \bar{o}^2 \dfrac{(B_2)}{(\Delta)(M^2+1)} \cdot \dfrac{f'^2 f''}{1+f'^2} \\ \qquad - \bar{o}^2 \dfrac{(A_z)}{(\Delta)} \cdot \dfrac{f'}{y} \\ [A_x(x\,y\,o)]_{(R)} = \dfrac{-\xi''_{t^2}(0)}{\bar{o}(R)M} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+f'^2}} + \dfrac{1-\mu^2}{\bar{o}} \cdot \dfrac{M^2+1}{(R)M^3} \cdot \dfrac{[F''_{t^2}(y,o)]_{(R)}}{\sqrt{1+f'^2}} \\ \qquad - (1-\mu^2) \dfrac{M^2+1}{(R)M^2} \cdot \dfrac{f'.F''_{ty}(yo)}{1+f'^2} \end{cases}$$

Loin de l'axe de révolution on retrouve les valeurs relatives aux mouvements (...

5) Dérivées initiales de $|A'|$

De la définition de $\Theta(y\,z\,t)$ (2-1-1), il résulte que $\Theta(y\,z\,t) = \vec{N}_f.\vec{N}_F$. Par conséquent si l'on transpose la seconde équation (2-3-3) puis que l'on multiplie par $\vec{N}_f$, on obtient, avec le système (2-3-6), le nouveau système :

$$(2\text{-}5\text{-}1)\quad \begin{cases} x = f(y\,z) + \xi(t) \\ \| |f'| \; ; |A'| \| \times \begin{vmatrix} A_x \\ \\ 1 \end{vmatrix} = \dfrac{\partial |f'|}{\partial \vec{s}} \begin{vmatrix} 1 \\ v \\ w \end{vmatrix} \\ x = F(y\,z\,t) \\ \| |F'| \; ; |A'| \| \times \begin{vmatrix} A_x \\ \\ 1 \end{vmatrix} = \| |H'| ; |F'|'_y ; |F'|'_z \| \times \begin{vmatrix} \Theta(y\,z\,t) \\ H f'_y \\ H f'_z \end{vmatrix} (1-\mu^2) \end{cases}$$

Les expressions de H, $|H'|$, $|f'|$ et $|F'|$ étant indépendantes de x, on en déduit par dérivation :

$$(2\text{-}5\text{-}2)\qquad \begin{cases} x = f(y\,z) + \xi(t) \\ \\ \dfrac{\partial^n |A'|}{\partial x^n} + |f'|\, A^{(n+1)}_{x^{n+1}} = \dfrac{\partial |f'|}{\partial \vec{s}} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial^n v}{\partial x^n} \\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} \end{vmatrix} \\ \\ x = F(y\,z\,t) \\ \\ \dfrac{\partial^n |A'|}{\partial x^n} + |F'|\, A^{n+1}_{x^{n+1}} = 0 \end{cases}$$

valables à un instant quelconque. Pour $t = 0$, A_x et $|A'|$ ainsi que leurs dérivées sont les mêmes. D'autre part à cet instant $|F'| \neq 0$ d'après (2-2-3). Ce système détermine donc les valeurs initiales suivantes :

$$(2\text{-}5\text{-}3)\qquad \begin{cases} A^{(n+2)}_{tx^{n+1}} = 0 & A^{(n+2)}_{yx^{n+1}} = 0 & A^{(n+2)}_{zx^{n+1}} = 0 \\ \\ A^{(n+1)}_{x^{n+1}} = 0 & v^{(n)}_{x^{n+1}}(x\,y\,z\,o) = 0 & w^{(n)}_{x^{n+1}}(x\,y\,z\,o) = 0 \end{cases}$$

La dernière équation de (2-5-2) pouvant être dérivée en x et en $\vec{s}$, on en déduit de même à l'instant initial les valeurs suivantes :

$$(2\text{-}5\text{-}4)\qquad \frac{\partial^{(n+p)} |A'|}{\partial x^n . \partial \vec{s}^{\,p}} = 0 \qquad \frac{\partial^{(p)} A^{(n+1)}_{x^{n+1}}}{\partial \vec{s}^{\,p}} = 0 \qquad x = F(y\,z\,t)$$

Enfin du système (2-3-3) on déduit le nouveau système valable à t quelconque :

$$x = F(y\,z\,t)$$

$$\frac{\partial^{n+2} \vec{V}(x\,y\,z\,t)}{\partial \vec{r} . \partial x^{n+1}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^{n+2} \vec{V}(x\,y\,z\,t)}{\partial \vec{s} . \partial x^{n+1}} = 0$$

Puisque pour $t = 0$ ces fonctions ne dépendent plus que de y et z on en déduit les valeurs initiales suivantes :

$$(2\text{-}5\text{-}5)\qquad \frac{\partial^{n+2+p+q} \vec{V}(x\,y\,z\,o)}{\partial \vec{r} . \partial x^{n+1} \partial y^p \partial z^q} = 0 \qquad \frac{\partial^{n+2+p+q} \vec{V}(x\,y\,z\,o)}{\partial \vec{s} . \partial x^{n+1} \partial y^p \partial z^q} = 0$$

Ces expressions seront utilisées dans les calculs des coefficients d'ordre supérieur.

6) Méthode de calcul des coefficients d'ordre supérieur.

On connait déjà par (2-2-1) les dérivées initiales : $\dfrac{\partial^{(p+q)} F(y\,z\,o)}{\partial y^p . \partial z^q}$. Les notations

(2-1-3)et l'expression (2-3-2) de la matrice $|H'|$ permettent d'écrire :

$$|H'| = a|F'|'_t + b|F'|'_y + c|F'|'_z.$$

D'autre part on sait que :

$$|\bar{A}'| = \vec{N}_f \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}} \quad \text{et que} \quad \frac{\partial |F'|}{\partial \vec{s}} = \| \, |F'|'_t \, ; \, |F'|'_y \, ; \, |F'|'_z \, \|$$

Enfin on a :

$$\overline{\frac{\partial (\vec{N}_F)}{\partial \vec{s}}} = \begin{vmatrix} 0 & ; & -F''_{yt} & ; & -F''_{zt} \\ 0 & ; & -F''_{y^2} & ; & -F''_{zy} \\ 0 & ; & -F''_{zy} & ; & -F''_{z^2} \end{vmatrix}$$

Or $F(y\,z\,t)$ est indépendant de x.Donc $\overline{\frac{\partial (\vec{N}_F)}{\partial \vec{s}}} = \frac{\partial |F'|}{\partial \vec{r}}$ .Dans ces conditions le système (2-3-3) s'écrit :

(2-6-1)
$$\begin{cases} x = F(y\,z\,t) \\ \left|\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}\right| . |F'| + \left|\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}\right| = (1-\mu^2)\left|\vec{N}_F\right| \frac{\partial |F'|}{\partial \vec{s}} |X| - (1-\mu^2)\left|\frac{\partial |F'|}{\partial \vec{r}}\right| . H \end{cases}$$

De même le système (2-5-1) s'écrira :

(2-6-2)
$$\begin{cases} x = f(y\,z) + \xi(t) \qquad A_x |f'| + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}} . N_f = \frac{\partial |f'|}{\partial \vec{s}} \begin{vmatrix} 1 \\ v \\ w \end{vmatrix} \\ x = F(y\,z\,t) \\ A_x |f'| + \overline{\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}} . N_F = (1-\mu^2)\Theta(x\,y\,z\,t) . \frac{\partial |F'|}{\partial \vec{s}} |X| + (1-\mu^2) \| \, |F'|'_y ; |F'|'_z \, \| \times \begin{vmatrix} Hf'_y \\ Hf'_z \end{vmatrix} \end{cases}$$

Si l'on se place alors à l'instant du départ t = 0,on sait que : x = f = F.Or $|F'|, |f'|, |X|, \Theta$ et H ne dépendent que des dérivées premières de F et f.Par conséquent l'équation obtenue en éliminant $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}} . \vec{N}_f$ et x du système (2-6-2) détermine les dérivées secondes de $F(y\,z\,t)$ par l'intermédiaire de $\frac{\partial |F'|}{\partial \vec{s}}$ en fonction de A_x.Ce calcul a fait l'objet des paragraphes antérieurs.Ensuite (2-5-1) détermine les dérivées premières initiales de $\vec{V}$ car $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}$ pour $\vec{r} = \vec{s} = \begin{vmatrix} y \\ z \end{vmatrix}$ .On peut étendre ce procédé pour le calcul des coefficients d'ordre supérieur.

- En effet d'après la définition de $|F'|$ l'ensemble des dérivées d'ordre n+2 ($n \geq 1$) de $F(y\,z\,t)$ est déterminé par la connaissance de $\frac{\partial^{(n+1)} |F'|}{\partial \vec{s}^{n+1}}$ qui contient en

particulier les matrices : $|F'|^{n+1}_{ys^n}$ et $|F'|^{n+1}_{zs^n}$. Par suite si l'on dérive (2-6-2) par rapport à $\vec{s}^n$ on déduit $\frac{\partial^{(n+1)}|F'|}{\partial \vec{s}^{n+1}}$ en fonction de $\frac{\partial^n|X|}{\partial \vec{s}^n}$, $\frac{\partial^n \Theta}{\partial \vec{s}^n}$, $\frac{\partial^n H}{\partial \vec{s}^n}$ et $\frac{\partial^n|F'|}{\partial \vec{s}^n}$ contenant les dérivées de F(y z t) à l'ordre (n+1) seulement. Mais ce système contenant aussi $\frac{\partial^n(A_x)}{\partial \vec{s}^n}$ et $\frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n}\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}.\vec{N}\right]$ pour des valeurs différentes de x est indéterminé, comme dans le cas des dérivées secondes.

— Si l'on se place pour la valeur t = 0, alors $\frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n}\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}.\vec{N}\right]$ ne dépend plus de x et d'après (2-5-4) : $\frac{\partial^n(A_x)}{\partial \vec{s}^n} = 0$. Dans ces conditions le système dérivé de (2-6-2) peut être remplacé à cet instant par le système équivalent suivant :

(2-6-3)

$$\begin{cases} x = f(y\,z) \\ A_x \frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n}|F'| - A_x \frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n}|F'| = (1-\mu^2)\frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n}\left[\Theta \frac{\partial|F'|}{\partial \vec{s}}|X|\right] \\ \qquad +(1-\mu^2)\frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n}\left(\left\| |F'|^{\cdot}_{y}|F'|^{\cdot}_{z}\right\| \times \left| \begin{matrix} H f'_y \\ H f'_z \end{matrix} \right|\right) \\ \qquad -\frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n}\left(\frac{\partial|F'|}{\partial \vec{s}}\left| \begin{matrix} 1 \\ v \\ w \end{matrix} \right|\right) \\ \frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n}\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}.\vec{N}_f\right] = \frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n}\left(\frac{\partial|F'|}{\partial \vec{s}}\left| \begin{matrix} 1 \\ v \\ w \end{matrix} \right|\right) - A_x \frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n}|F'| \end{cases}$$

De même si l'on dérive (2-6-1) par rapport à $\vec{s}^{\,n-1}$ et que l'on y fasse ensuite t = 0 on obtient le système :

(2-6-4)

$$\begin{cases} x = f(y\,z) \\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial \vec{s}^{\,n-1}}\left[\left|\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}\right|_x |F'|\right] + \left|\frac{\partial^n \vec{V}}{\partial \vec{s}^n}\right| = (1-\mu^2)\frac{\partial^{n-1}}{\partial \vec{s}^{n-1}}\left[\left|\vec{N}_f\right|\frac{\partial|F'|}{\partial \vec{s}}|X|\right] \\ \qquad -(1-\mu^2)\frac{\partial^{n-1}}{\partial \vec{s}^{n-1}}\left[\left|\frac{\partial|F'|}{\partial \vec{r}}\right|.H\right] \end{cases}$$

D'autre part d'après les relations (2-2-1) on a : $\frac{\partial^n \vec{V}}{\partial \vec{r}\,\partial \vec{s}^{n-1}} = \frac{\partial^n \vec{V}}{\partial \vec{s}^n}$ pour $\vec{r} = \vec{s} = \left| \begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \right|$. Dans ces conditions l'équation (2-6-4) et la

seconde équation (2-6-3) détermineront les valeurs initiales de $\frac{\partial^{n+1}|F'|}{\partial \vec{s}^{\,n+1}}$ et $\frac{\partial^n \vec{V}}{\partial \vec{r}\,\partial \vec{s}^{\,n-1}}$ en fonction des dérivées d'ordre inférieur des mêmes quantités c'est-à-dire les valeurs initiales des dérivées d'ordre $(n+2)$ de $F(y\,z\,t)$ et d'ordre n de $\vec{V}(x\,y\,z\,t)$. Enfin la dernière équation de (2-6-3) déterminera les dérivées initiales d'ordre $(n+1)$ de $\vec{V}$.

L'examen des équations précédentes montre que les valeurs initiales des dérivées d'ordre $(n+2)$ de $F(y\,z\,t)$ dépendent linéairement de A_x et des dérivées du même ordre de $f(y\,z) + \xi(t)$ pour $t = 0$. De plus il montre que le calcul de $F^{n+2}_{t^{n+2}}(y\,z\,o)$ exige le calcul de toutes les dérivées initiales d'ordre inférieur et aussi des dérivées par rapport à $\vec{s}^{\,n+2}$.

7) Coefficients du 3ème ordre en y, z et t.

Parmi les 10 dérivées troisièmes initiales de $F(y\,z\,t)$ on connait quatre d'entre elles par les relations (2-2-4). Les autres sont contenues dans $\frac{\partial^2|F'|}{\partial \vec{s}^{\,2}}$. Il suffit donc de calculer les dix mêmes quantités qui interviennent dans (2-6-3) et (2-6-4) pour n=1. Par définition $|F'|$ est un contravecteur. Par suite :

$$\frac{\partial^2|F'|}{\partial \vec{s}^{\,2}} = \begin{vmatrix} F'''_{t^3} & F'''_{ty^2} & F'''_{tz^2} \\ F'''_{yt^2} & F'''_{y^3} & F'''_{yz^2} \\ F'''_{zt^2} & F'''_{zy^2} & F'''_{z^3} \end{vmatrix}$$

De même la matrice $|H'|$ est un contravecteur qui peut se décomposer de la manière suivante :

$$(2\text{-}7\text{-}1) \qquad |H'| = \begin{vmatrix} H'_t \\ H'_y \\ H'_z \end{vmatrix} = a|F'|'_t + b|F'|'_y + c|F'|'_z$$

les scalaires a, b et c étant définis par (2-1-3). On en déduit les deux expressions suivantes de $\frac{\partial|H'|}{\partial \vec{s}}$:

$$(2\text{-}7\text{-}2) \begin{cases} \dfrac{\partial|H'|}{\partial \vec{s}} = \begin{vmatrix} H''_{t^2} & H''_{ty} & H''_{tz} \\ H''_{yt} & H''_{y^2} & H''_{yz} \\ H''_{zt} & H''_{zy} & H''_{z^2} \end{vmatrix} \\ \dfrac{\partial|H'|}{\partial \vec{s}} = \dfrac{\partial a}{\partial \vec{s}}|F'|'_t + \dfrac{\partial b}{\partial \vec{s}}|F'|'_y + \dfrac{\partial c}{\partial \vec{s}}|F'|'_z + a\dfrac{\partial}{\partial \vec{s}}|F'|'_t + b\dfrac{\partial}{\partial \vec{s}}|F'|'_y + c\dfrac{\partial}{\partial \vec{s}}|F'|'_z \end{cases}$$

- Si l'on se place maintenant à l'instant t = 0 on a :

$\Theta = U \quad f'_y F''_{y^2} + f'_z F''_{zy} + f''_{y^2} F'_y + f''_{zy} F'_z = \Theta'_y = 2\,A$ et

$f'_y F''_{yz} + f'_z F''_{z^2} + f''_{yz} F'_y + f''_{z^2} F'_z = \Theta'_z = 2\,B$. Dans ces conditions le système (2-7-6) est déterminé. D'après l'expression (2-7-1) de $|H'|$, il en est de même du système (2-7-3). Dans ces conditions, du système (2-6-4) résulte l'équation suivante pour t = 0 :

$$(2\text{-}7\text{-}7)\quad \left|\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}\right| \cdot |F'| + \left|\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}\right| = (1-\mu^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -f'_y & 0 \\ 0 & 0 & -f'_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} F''_{t^2} & F''_{ty} & F''_{tz} \\ F''_{yt} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ F''_{zt} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} - (1-\mu^2)\left(\frac{F'_t}{U}\frac{\bar{o}^{-2}}{F'_t}\right) \begin{vmatrix} 0 & F''_{ty} & F''_{t^2} \\ 0 & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ 0 & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix}$$

Au même instant du système (2-6-3) résulte l'équation :

$$(2\text{-}7\text{-}8)\quad \left\{ A_x \frac{\partial |F'|}{\partial \vec{s}} - A_x \frac{\partial |f'|}{\partial \vec{s}} + \frac{\partial}{\partial \vec{s}}\left(\frac{\partial |f'|}{\partial \vec{s}} \begin{vmatrix} 1 \\ v \\ w \end{vmatrix}\right) = (1-\mu^2) U \frac{\partial |H'|}{\partial \vec{s}} + (1-\mu^2) \left\| \frac{\partial}{\partial \vec{s}} |F'|'_y ; \frac{\partial}{\partial \vec{s}} |F'|'_z \right\| \times \begin{vmatrix} Hf'_y \\ Hf'_z \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + (1-\mu^2) \left\| |H'| ; |F'|'_y ; |F'|'_z \right\| \times \frac{\partial}{\partial \vec{s}} \begin{vmatrix} \Theta \\ H f'_y \\ H f'_z \end{vmatrix} \right.$$

Or d'après les valeurs (2-7-5), les relations (2-7-2) montrent que les dérivées troisièmes de F(y z t) s'expriment en fonction de $\frac{\partial |H'|}{\partial \vec{s}}$. Par suite les valeurs initiales de $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}$ $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}$ et $\frac{\partial^2 |F'|}{\partial \vec{s}^2}$ sont définies par les deux équations précédentes. En opérant ligne par ligne on déterminera en particulier les dérivées troisièmes restantes : $F'''_{y^2 t}, F'''_{z^2 t}, F'''_{tyz}, F'''_{t^2 y}, F'''_{t^2 z}$ et F'''_{t^3}. On a donné dans chaque cas leur expression en fonction des dérivées d'ordre inférieur de F et ensuite en fonction seulement de $\bar{o}$, de M(y z o) et de l'obstacle. On remarque que les équations du mouvement n'interviennent que par A_x : on vérifie par suite que $F'''_{y^2 t}, F'''_{z^2 t}$ et F'''_{tyz} sont indépendantes des mouvements choisis (E) ou (R).

— A) Calculs de $F'''_{y^2 t}$, $F'''_{z^2 t}$ et F'''_{yzt}.

Elles résultent des lignes de (2-7-8) contenant H''_{y^2} H''_{z^2} et H''_{yz}. Mais d'après la symétrie des rôles de y et z il suffira de se limiter à écrire l'équation relative à H''_{y^2} et H''_{yz}. La seconde ligne se développe en :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(1-\mu^2)\left\{1+U\frac{\bar{c}^{-2}}{F'^2_t}\right\}(F'''_{y^2t}) - 2(1-\mu^2)\frac{\bar{c}^{-2}}{F'^3_t}(F''_{ty})^2 U + 4(1-\mu^2)\bar{c}^{-2}\frac{A}{F'^2_t}(F''_{ty}) - \\
&- (1-\mu^2)\frac{\bar{c}^{-2}}{F'_t}\left[2(f''^2_{y^2}+f''^2_{zy})+C\right] - 4(1-\mu^2)F'_t\,\frac{A\,f'_z(f''_{z^2}-f''_{zy})}{U^2} - \\
&- (1-\mu^2)\frac{F'_t}{U}C = v\,f'''_{y^3} + w\,f'''_{zy^2}
\end{aligned}
\right. \qquad (2\text{-}7\text{-}9)
$$

En utilisant les expressions des dérivées premières et secondes de $F(y\,z\,t)$ en fonction de $\bar{c}$, $M(y\,z\,o)$ et de l'obstacle on obtient :

$$
F'''_{y^2t}(y\,z\,o) = \frac{-8\,\bar{c}\,M^3}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{A^2}{U\sqrt{U}} + \frac{2\,\bar{c}\,M}{M^2+1}\cdot\frac{f''^2_{y^2}+f''^2_{zy}+C}{\sqrt{U}} + \frac{4\,\bar{c}\,M^3}{M^2+1}\cdot\frac{A\,f'_z(f''_{z^2}-f''_{zy})}{U\sqrt{U}} \qquad (2\text{-}7\text{-}10)
$$

Par permutation des lettres y et z on a de même :

$$
F'''_{z^2t}(y\,z\,o) = \frac{-8\,\bar{c}\,M^3}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{B^2}{U\sqrt{U}} + \frac{2\,\bar{c}\,M}{M^2+1}\cdot\frac{f''^2_{z^2}+f''^2_{zy}+D}{\sqrt{U}} + \frac{4\,\bar{c}\,M^3}{M^2+1}\cdot\frac{B\,f'_y(f''_{y^2}-f''_{zy})}{U\sqrt{U}} \qquad (2\text{-}7\text{-}11)
$$

La formule (2-7-9) de dépendant pas de A_x, la formule relative aux mouvements (P) et (R) résulte immédiatement de (2-7-10).

De même la troisième ligne contient H''_{yz} et se développe en :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(1-\mu^2)\left(1+U\frac{\bar{c}^{-2}}{F'^2_t}\right)(F'''_{tyz}) - 2(1-\mu^2)\frac{\bar{c}^{-2}}{F'^3_t}(F''_{ty})(F''_{tz})\,U + 2(1-\mu^2)\frac{\bar{c}^{-2}}{F'^2_t}(AF''_{tz}+BF''_{ty}) \\
&- (1-\mu^2)\frac{\bar{c}^{-2}}{F'_t}\left[2\,f''_{yz}(f''_{y^2}+f''_{z^2}) + f'_y f'''_{y^2z} + f'_z f'''_{yz^2}\right] - (1-\mu^2)\frac{F'_t}{U}(f'_y f'''_{zy^2}+f'_z f'''_{z^2y}) = \\
&= v\,f'''_{y^2z} + w\,f'''_{yz^2}
\end{aligned}
\right. \qquad (2\text{-}7\text{-}12)
$$

On en déduit par les expressions initiales de $\vec{V}$ et $\frac{\partial|F'|}{\partial\vec{s}}$ la valeur F'''_{tyz} pour les écoulements (E) :

$$
F'''_{tyz}(y\,z\,o) = \frac{-8\,\bar{c}\,M^3}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{AB}{U\sqrt{U}} + \frac{2\,\bar{c}\,M}{M^2+1}\cdot\frac{f''_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2}) + f'_y f'''_{y^2z} + f'_z f'''_{yz^2}}{\sqrt{U}} \qquad (2\text{-}7\text{-}13)
$$

- B) Calculs de F'''_{yt^2} et F'''_{zt^2}-

Les premières et quatrièmes lignes de (2-7-8) font apparaitre H''_{ty} et H''_{tz} d'où résultent les quantités cherchées.Il suffit d'écrire l'équation relative à y. On obtient :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(1-\mu^2)\left(1+U\frac{\bar{o}^2}{F'^2_t}\right)(F'''_{t^2y}) = A_x(F''_{ty})+(1-\mu^2)\left\{1+U\frac{\bar{o}^2}{F'^2_t}\right\}f'_y\frac{F'_t}{U}(F'''_{y^2t}) + \\
&+(1-\mu^2)\left\{1+U\frac{\bar{o}^2}{F'^2_t}\right\}(f'_z)\frac{F'_t}{U}(F'''_{ty^2}) + 2(1-\mu^2)\frac{\bar{o}^2}{F'^3_t}(F''_{ty})(F''_{t^2})U - \\
&-2(1-\mu^2)F'_t(f'_yF''_{ty}+f'_zF''_{tz})\frac{A}{U^2} - 2(1-\mu^2)\frac{\bar{o}^2}{F'^2_t}(F''_{t^2})A+(1-\mu^2)\left\{1+U\frac{\bar{o}^2}{F'^2_t}\right\}\frac{F'_t}{U}\left\{f''_{y^2}F''_{ty}+\right. \\
&\left.+f''_{zy}F''_{tz}\right\}+(1-\mu^2)\left\{1-U\frac{\bar{o}^2}{F'_{t^2}}\right\}\frac{(F''_{ty})}{U}(f'_yF''_{ty}+f'_zF''_{tz})
\end{aligned}
\right. \qquad (2\text{-}7\text{-}14)
$$

Elle contient les dérivées F'''_{y^2t} et F'''_{ty^2} calculées précédemment et A_x.

En mouvement (E) si l'on utilise les valeurs (2-4-5) cette équation détermine F'''_{t^2y} sous la forme suivante :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&[F'''_{t^2y}(yzo)]_{(E)} = \frac{2\bar{o}^2M^2}{M^2+1}\cdot\frac{Af''_{y^2}+Bf''_{z^2}}{U}+\frac{4\bar{o}^2M^4}{M^2+1}\cdot\frac{Bf'_y(f''_{y^2}-f''_{zy})}{U^2} - \\
&\frac{8\bar{o}^2M^4}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{A(Af'_y+Bf'_z)}{U^2}+2\frac{\bar{o}^2M^2}{M^2+1}\cdot\frac{f'_y[f''^2_y+f''^2_{zy}+C]+f'_z[(f''_{y^2}+f''_{z^2})f''_{zy}+G]}{U} + \\
&+2\frac{M^2(M^2-1)[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2]-M^4(\Delta)}{(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2+1)(\Delta)}\cdot\frac{A}{U}\cdot\frac{\xi''_{t^2}(0)}{1-\mu^2} + \\
&+2\bar{o}^2\frac{(\Delta)[-2\mu^2M^6-2(1-\mu^2)M^4-2\mu^2M^2+2\mu^2-2]-(T)(M^2+1)[(1-\mu^2)M^2+2\mu^2M^2+1-\mu^2]}{(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2+1)^3(\Delta)}\cdot \\
&\cdot\frac{A(Af'_y+Bf'_z)}{U^2}-2\bar{o}^2\frac{[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2-1)[(1-\mu^2)M^2+2\mu^2M^4+1-\mu^2]}{(M^2+1)^2(\Delta)}\cdot\frac{A[2\Omega-U(f''_{z^2}+f''_{z^2})]}{U^2}
\end{aligned}
\right. \qquad (2\text{-}7\text{-}15)
$$

où (Δ) est défini par (2-4-6) et où l'on a posé :

$$(2\text{-}7\text{-}16)\qquad \left\{\begin{array}{l}(T)(I^2+1) = (-\mu^4+\mu^2)M^8 + (2\mu^4-3\mu^2-1)M^6 - (3\mu^4+2\mu^2-1)M^4 + \\ \qquad + (2\mu^4-\mu^2+1)M^2 + (1-\mu^2)^2\end{array}\right.$$

Par permutation des lettres y et z ainsi que A et B on obtient la formule analogue pour $[F'''_{t^2 z}(y\,z\,o)]_{(E)}$. Dans le cas où la formule (2-7-15) est indépendante de z, on obtient la formule relative aux mouvements plans (P).

En écoulement (R) on doit utiliser les valeurs (2-4-8). Dans ces conditions, toutes réductions faites, l'équation (2-7-14) se développe sous la forme :

$$(2\text{-}7\text{-}17)\qquad \left\{\begin{array}{l}[F'''_{t^2 y}(y\,o)]_{(R)} = [F'''_{t^2 y}(y,o)]_{(P)} + 2\,\bar{o}^2\,\dfrac{\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]}{(M^2+1)^2(\Delta)}\cdot \\ \cdot\dfrac{f'^2 f''}{1+f'^2}\cdot\dfrac{1}{y}\end{array}\right.$$

qui redonne la formule relative aux mouvements (P), loin de l'axe de révolution.

On est alors en mesure d'aborder le calcul de la valeur initiale de $F'''_{t^3}(y\,z\,t)$

8) Valeurs initiales de F'''_{t^3}

Des relations (2-7-2) et (2-7-5) il résulte que F'''_{t^3} n'apparait qu'une fois par la première ligne de l'équation (2-7-8). Si l'on développe cette ligne on obtient :

$$(2\text{-}8\text{-}1)\qquad \left\{\begin{array}{l}A_x[F''_{t^2}(o)-\xi''_{t^2}(o)]+\xi'''_{t^3}(o) = (1-\mu^2)UH''_{t^2} + (1-\mu^2)H(f'_y F'''_{t^2 y} + f'_z F'''_{t^2 z}) + \\ \qquad + 2(1-\mu^2)H'_t(f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt})\end{array}\right.$$

Par élimination des quantités H, H'_t et H''_{t^2} on en déduit l'équation :

$$(2\text{-}8\text{-}2)\qquad \left\{\begin{array}{l}(1-\mu^2)\left(1+U\dfrac{\bar{o}^2}{F'^2_t}\right)(F'''_{t^3}) - (1-\mu^2)\left(1+U\dfrac{\bar{o}^2}{F'^2_t}\right)\dfrac{F'_t}{U}(f'_y F'''_{t^2 y} + f'_z F'''_{t^2 z}) - \\ -2(1-\mu^2)\dfrac{F'^2_t}{U}(F''_{yt})^2 + [F''_{zt})^2] - \dfrac{4(1-\mu^2)}{U}(F''_{t^2})(f'F''_{yyt} + f'_z F''_{zzt}) - 2(1-\mu^2)\dfrac{\bar{o}^2}{F'^3_t}(F''_{t^2})^2\,U + \\ +2(1-\mu^2)\left(1+U\dfrac{\bar{o}^2}{F'^2_t}\right)(f'_y F''_{yyt} + f'_z F''_{zzt}) + 4(1-\mu^2)\dfrac{F'_t}{U^2}(f'_y F''_{yyt} + f'_z F''_{zzt})^2 = A_x(F''_{t^2} - \xi''_{t^2}) + \xi'''_{t^3}.\end{array}\right.$$

Cette équation contient toutes les dérivées secondes de $F(y\,z\,t)$ par rapport à $\vec{s}^2$ ainsi que les dérivées troisièmes. Elle dépend de la nature des mouvements considérés et déterminera ensuite $F'''_{t^3}(0)$. La formule (2-7-15) et son analogue en z déterminent le terme dépendant des dérivées troisièmes. Mais il est plus simple d'utiliser l'équation condensée (2-7-14) ainsi que (2-7-9) ce qui permet d'écrire dans tous les cas :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&-(1-\mu^2)\left(1+U\frac{\bar{c}^2}{F'^2_t}\right)\left(f'_y F'''_{t^2 y}+f'_z F'''_{t^2 z}\right)\frac{F'_t}{U}=\frac{-2\bar{c}^2M^2}{M^2+1}\frac{\Omega}{U}A_x+2(1-\mu^2)\bar{c}\,\frac{M^2-1}{M(M^2+1)U\sqrt{U}}\frac{\Omega}{t^2}(F''_{t^2})+\\
&+4(1-\mu^2)\bar{c}^3\frac{M(M^4+1)}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{\Omega^2}{U^2\sqrt{U}}-4(1-\mu^2)\bar{c}^3M^3\,\frac{f'_y f'_z\left[f''_{y^2}f''_{z^2}(f'^2_y+f'^2_z)+f'_y f'_z f''_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})\right]\Omega f''_{zy}}{U^2\sqrt{U}}\\
&+8(1-\mu^2)\bar{c}^3\frac{M^3}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{\Omega^2-2f'^2_y f'^2_z(f''^2_{zy}+f''_{y^2}f''_{z^2})+2f'_y f'_z\,AB}{U^2\sqrt{U}}-\\
&-2(1-\mu^2)\frac{\bar{c}^3M}{U\sqrt{U}}\left[\Omega_1+4f'_y f'_z f''_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})+2(f'^2_y f''^2_{y^2}+f'^2_z f''^2_{z^2})+2f''^2_{zy}(f'^2_y+f'^2_z)+2f'_y f'_z\,G\right]
\end{aligned}
\right. \tag{2-8-3}
$$

Dans ces conditions (2-8-2) s'exprime en fonction de $\frac{\partial|F'|}{\partial\vec{s}}$ seulement. On obtient, toutes réductions faites, en utilisant la valeur de cette matrice par rapport à $M(y\,z\,o)$, $\bar{c}$ et l'obstacle, les expressions suivantes :

- A) Mouvements (E) et (P) :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left[F'''_{t^3}(y\,z\,o)\right]_{(E)}=4\bar{c}^3\frac{M^5}{M^2+1}\cdot\frac{\left[Af'_y(f''_{z^2}-f''_{zy})+Bf'_z(f''_{y^2}-f''_{zy})\right]}{U^2\sqrt{U}}+8\bar{c}^3\frac{M^5}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{A^2+B^2}{U\sqrt{U}}+\\
&\frac{16\bar{c}^3M^5}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{f'_y f'_z\left[f'_y f'_z(f''^2_{zy}+f''_{y^2}f''_{z^2})-AB\right]}{U^2\sqrt{U}}+2\bar{c}^3\frac{M^3}{M^2+1}\cdot\frac{\left[\Omega_1+2(A^2+B^2)+2f'_y f'_z\,G\right]}{U\sqrt{U}}+\\
&+\bar{c}^3\frac{(A_3)}{M(M^2+1)(\Delta)^2}\cdot\frac{\left[2\Omega-U(f''_{y^2}+f''_{z^2})\right]^2}{U^2\sqrt{U}}-\frac{\bar{c}}{1-\mu^2}\cdot\frac{M(B_3)}{(M^2+1)(\Delta)^2}\cdot\frac{2\Omega-U(f''_{y^2}+f''_{z^2})}{U\sqrt{U}}\cdot\xi''_{t^2}(0)+\\
&+\frac{M^3(C_3)}{\bar{c}(1-\mu^2)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2+1)(\Delta)^2}\cdot\frac{[\xi''_{t^2}(0)]^2}{\sqrt{U}}+\frac{\bar{c}^3(D_3)}{M(M^2+1)^2(\Delta)^2}\cdot\frac{2\Omega-U(f''_{y^2}+f''_{z^2})}{U^2\sqrt{U}}\Omega+\\
&+\frac{M^2}{(1-\mu^2)(M^2+1)}\cdot\xi'''_{t^3}(0)-\bar{c}^3\frac{(E_3)}{(\mu^2M^2+1-\mu^2)M(M^2+1)^4(\Delta)^2}\cdot\frac{\Omega^2}{U^2\sqrt{U}}-\bar{c}\frac{(F_3)}{(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2+1)^3(\Delta)^2}\cdot\\
&\cdot\frac{\Omega}{U\sqrt{U}}\cdot\xi''_{t^2}(0)
\end{aligned}
\right. \tag{2-8-4}
$$

- B) Mouvements R :

(2-8-5)

$$\begin{cases} [F'''_{t^3}(y\ o)]_{(R)}=[F'''_{t^3}(y\ o)]_{(P)}+\dfrac{\bar{o}^3\,(G_3)}{M(M^2+1)(\Delta)^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\dfrac{f'^2}{y^2}+\dfrac{\bar{o}^3(H_3)}{M(M^2+1)^2(\Delta)^2}\cdot\dfrac{f'^3f''}{(1+f'^2)^{3/2}}\cdot\dfrac{-}{y} \\ -2\bar{o}^3\dfrac{(A_3)}{M(M^2+1)(\Delta)^2}\cdot\dfrac{f'f''(f'^2-1)}{(1+f'^2)3/2}\cdot\dfrac{1}{y}-\dfrac{\bar{o}}{1-\mu^2}\cdot\dfrac{M(I_3)}{(M^2+1)(\Delta)^2}\cdot\dfrac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\cdot\dfrac{\xi''_{t2}(0)}{y} \end{cases}$$

Les coefficients de ces formules dépendant de μ^2 et M(y z o) sont définis par (2-4-6) pour (Δ) et (B_2).On a posé de plus les coefficients suivants :

(2-8-6)

$$\begin{cases} (A_3)=(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2-1)^2[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]^2[M^4+(2\mu^2+1)M^2+2(1-\mu^2)] \\ (B_3)=[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2-1)\{2[M^6+2\mu^2M^2+2(1-\mu^2)]-(\Delta)[(2-\mu^2)M^2+1-\mu^2]\} \\ (C_3)=(1-\mu^2)(\Delta)^2-(\Delta)(M^2-1)[(2-\mu^2)M^2+1-\mu^2]+(M^2-1)[M^6+2\mu^2M^4+(1-4\mu^2)M^2-2(1-\mu^2)] \\ (D_3)=2[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2-1)\{(B_2)[M^4+(2\mu^2+1)M^2+2(1-\mu^2)]-(\Delta)M^4(M^2-1)(\mu^2M^2+1-\mu^2)\} \\ (E_3)=4(\Delta)^2M^4(M^2+1)[\mu^2M^6+(5\mu^2+2)M^4+(-2\mu^2+7)M^2+1-\mu^2]-(2\mu^2-1)(B_2)^2(M^4-1)- \\ \qquad -2(\Delta)(B_2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)M^2(M^2-1)^2 \\ (F_3)=2(\Delta)^2M^2(M^2+1)(\mu^2M^2+\mu^2-1)-(\Delta)(B_2)(M^2+1)[(2-\mu^2)M^2+1-\mu^2]+ \\ \qquad +2(B_2)(M^2-1)[M^6+2M^4+(2\mu^2+1)M^2+2(1-\mu^2)]+ \\ \qquad +(\Delta)M^2(M^4-1)[2(\mu^2+1)M^4+(3-4\mu^2)M^2+2(\mu^2-1)] \\ (G_3)=(\mu^2M^2+1-\mu^2)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]^2(M^2-1)^2[M^4+(2\mu^2+1)M^2+2(1-\mu^2)] \\ (H_3)=[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2-1)\{2(\Delta)M^2[\mu^2M^4+(1-2\mu^2)M^2+\mu^2-1]-(B_2)[M^4+(4\mu^2+1)M^2+4(1-\mu^2)]\} \\ (I_3)=[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2-1)\{(\Delta)[(2-\mu^2)M^2+1-\mu^2]-2M^6-4\mu^2M^4+(8\mu^2-2)M^2+4(1-\mu^2)\} \end{cases}$$

On connait donc toutes les dérivées troisièmes initiales de F(y z t) en fonction des données initiales des chocs créés par le départ de l'obstacle dans le fluide au repos.

) Sur les coefficients du quatrième ordre.

Le procédé est analogue à celui de la détermination des dérivées troisièmes.

Les équations (2-6-3) et (2-6-4) écrites pour n=2 font apparaitre $\dfrac{\partial^2|H'|}{\partial\vec{s}^2}$ et $\dfrac{\partial^3|F'|}{\partial\vec{s}^3}$ qui contiennent l'ensemble des coefficients du 4ème ordre à l'instant initial.

D'après leurs expressions $\dfrac{\partial|H'|}{\partial\vec{s}}$ et $\dfrac{\partial^2|F'|}{\partial\vec{s}^2}$ sont des contravecteurs.On a ainsi :

(2-9-1)

$$\frac{\partial^3|F|}{\partial\vec{s}^3}=\frac{\partial}{\partial\vec{s}}\ \|\ |F'|''_{t^2}\ ;\ |F'|''_{y^2}\ ;\ |F'|''_{z^2}\ \|$$

et une expression analogue pour $\frac{\partial^2|H'|}{\partial \vec{s}^2}$. On dérive de la même façon (2-7-3) et (2-7-4). L'expression de $\frac{\partial^2|X|}{\partial \vec{s}^2}$ se détermine à partir des scalaires (2-7-6). En se plaçant ensuite à l'instant t=0 les équations analogues à (2-7-7) et (2-7-8) déterminent les dérivées d'ordre quatre initiales qu'il reste à déterminer. Le calcul, bien que ne présentant pas de difficultés, est long. Comme on peut le remarquer pour les coefficients d'ordre trois, la place des termes identiques dans $\frac{\partial^3|F'|}{\partial \vec{s}^3}$ montre que le calcul des 10 dérivées restantes d'ordre quatre ne peut pas s'effectuer dans un ordre arbitraire. Ainsi celui de $F^{IV}_{t^4}(0)$ exige le calcul préalable de tous les autres c'est-à-dire en dehors de ceux définis par (2-2-1) : $F^{IV}_{y^3t}$, $F^{IV}_{z^3t}$, $F^{IV}_{tyz^2}$, $F^{IV}_{ty^2z}$, $F^{IV}_{t^2yz}$, $F^{IV}_{t^2y^2}$, $F^{IV}_{t^2z^2}$, $F^{IV}_{t^3y}$ et $F^{IV}_{t^3z}$. La symétrie des rôles joués par y et z réduit ces calculs à cinq dérivées seulement : $F^{IV}_{y^3t}$, $F^{IV}_{ty^2z}$, $F^{IV}_{t^2yz}$, $F^{IV}_{t^2y^2}$ et $F^{IV}_{t^3y}$.

Afin d'éviter des écritures fastidieuses on s'est limité à donner l'équation matricielle fournissant chacune de ces dérivées en fonction des dérivées d'ordre moindre et leurs expressions en fonction des données initiales au départ.

A) Calculs de $F^{IV}_{ty^3}$ et $F^{IV}_{tz^3}$.

Ces dérivées sont les seules inconnues des matrices colonnes $|F'|'''_{y^3}$ et $|F'|'''_{z^3}$ qui apparaissent dans l'expression (2-9-1). En se limitant à $F^{IV}_{ty^3}$ l'équation matricielle qui le détermine en fonction des matrices colonnes d'ordre inférieur s'écrit :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(1-\mu^2)U|\bar{X}|\,|F'|'''_{y^3}+3(1-\mu^2)|\bar{X}|\left[A|F'|''_{y^2}+(C+f''^2_{y^2}+f''^2_{zy})|F'|'_y\right]+\\
&+3(1-\mu^2)\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial y}\left[U|F'|''_{y^2}+3A|F'|'_y\right]+(1-\mu^2)U\,\frac{\partial^2|\bar{X}|}{\partial y^2}|F'|'_y+\\
&+(1-\mu^2)\left(\frac{F'_t}{U}-\frac{\bar{\sigma}^2}{F'_t}\right)\left[E+3(f''_{y^2}f'''_{y^3}+f''_{zy}f'''_{zy^2})\right]=\gamma F^{IV}_{y^4}+W^{IV}_{zy^3}
\end{aligned}
\right. \qquad (2\text{-}9\text{-}2)
$$

Cette équation ne contenant pas $A_{\bar{x}}$ on aura en la résolvant par rapport à $F^{IV}_{ty^3}$ la valeur suivante :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left[F^{IV}_{ty^3}(y\,z\,o)\right](E)=\bar{\sigma}.M.\frac{\bar{\Pi}}{\sqrt{U}}+6\,\bar{\sigma}.\frac{M^3}{M^2+1}\,\frac{f''_{y^2}f'''_{y^3}+f''_{yz}f'''_{zy^2}}{\sqrt{U}}+8\bar{\sigma}.\frac{M^3}{M^2+1}.\frac{A\,f'_y f'''_{y^3}}{U\sqrt{U}}+\\
&+6\,\bar{\sigma}.\frac{M^3}{(M^2+1)^3}.\frac{A^2 f'_y(f''_{y^2}-f''_{zy})}{U^2\sqrt{U}}-24\,\bar{\sigma}.\frac{M^3}{(M^2+1)^3}\,\frac{A(C+f''^2_{y^2}+f''^2_{zy})}{U\sqrt{U}}+96\,\bar{\sigma}\,\frac{M^3}{(M^2+1)^3}.\frac{A^3}{U^2\sqrt{U}}
\end{aligned}
\right. \qquad (2\text{-}9\text{-}3)
$$

et l'expression analogue pour $\left[F^{IV}_{tz^3}(y\,z\,o)\right]_{(E)}$ en permutant y et z, A et B, E et F (voir 2-1-1). Cette formule donnera les formules relatives aux mouvements (P) et (R) lorsqu'elle sera indépendante de z.

— B) Calcule de $F^{IV}_{tyz^2}$ et $F^{IV}_{ty^2z}$.

Ces dérivées apparaissent comme les seules inconnues des matrices colonnes $|F'|'''_{y^2z}$ et $|F'|'''_{yz^2}$. L'équation analogue à (2-9-2) et déterminant $|F'|'''_{yz^2}$ s'écrit alors :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(1-\mu^2)U|\bar{X}|\times|F'|'''_{yz^2}+2(1-\mu^2)A|\bar{X}|\times|F'|''_{z^2}+4(1-\mu^2)B|\bar{X}|\,.|F'|''_{zy}+\\
&+4(1-\mu^2)\left[G+f''_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})\right]|\bar{X}|\,.|F'|'_{z}+2(1-\mu^2)(D+f''^2_{zy}+f''_{z^2})|\bar{X}|\,.|F'|'_{y}+\\
&+2(1-\mu^2)\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial z}\left[U|F'|''_{zy}+A|F'|'_{z}\right]+4(1-\mu^2)B\,\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial y}\,.|F'|'_{z}+\\
&+(1-\mu^2)\left(\frac{F'_t}{U}-\frac{\bar{o}^2}{F'_t}\right)\left[f'_y f^{IV}_{y^2z^2}+f'_z f^{IV}_{yz^3}+2\left(f''_{y^2}f'''_{z^2y}+f''_{zy}f'''_{z^3}\right)+4\left(f''_{z^2}f'''_{y^2z}+f''_{zy}f'''_{zy^2}\right)\right]=\\
&=v\,f^{IV}_{y^2z^2}+w\,f^{IV}_{z^3y}\,.
\end{aligned}
\right. \qquad (2\text{-}9\text{-}4)
$$

On en déduit sa valeur en fonction des données initiales pour les mouvements (E) :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left[F^{IV}_{tyz^2}(y\,z\,o)\right]_{(E)}=2\bar{o}\,\frac{M^3}{M^2+1}\cdot\frac{f'_y f^{IV}_{y^2z^2}+f'_z f^{IV}_{yz^3}}{\sqrt{U}}+2\,\bar{o}\cdot\frac{M}{M^2+1}\cdot\frac{f''_{y^2}f'''_{z^2y}+f''_{zy}f'''_{z^3}+2(f''_{zy}f'''_{zy^2}+f''_{z^2}f'''_{zy})}{\sqrt{U}}\\
&-8\bar{o}\cdot\frac{M^3}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{AD+2BG}{U\sqrt{U}}-4\bar{o}\,\frac{M(M^2-1)}{(M^2+1)^3}\,\frac{A(f''^2_{zy}+f''^2_{z^2})+2Bf''_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})}{U\sqrt{U}}+\\
&+96\bar{o}\,\frac{M^5}{(M^2+1)^5}\cdot\frac{A.B^2}{U^2\sqrt{U}}-8\bar{o}\,\frac{M^3(M^2-1)}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{Af'_z\left[Af''_{z^2}-f'_z f''_{zy}(f''_{y^2}+f''_{zy})\right]}{U^2\sqrt{U}}-\\
&-4\bar{o}\,\frac{M}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{A(f''^2_{zy}+f''^2_{z^2})+2Bf''_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})}{U\sqrt{U}}
\end{aligned}
\right. \qquad (2\text{-}9\text{-}5)
$$

La valeur $\left[F^{IV}_{ty^2z}(y\,z\,o)\right]_{(E)}$ s'en déduit en permutant y et z, A et B, C et D, G étant conservé d'après son expression (2-1-1). Ces dérivées quatrièmes ne sont pas à considérer pour les mouvements (P) et (R).

0) Expressions de $F^{IV}_{t^2y}(0)$ $F^{IV}_{t^2yz}(0)$ et $F^{IV}_{t^3y}(0)$

Ce sont les seules inconnues des matrices colonnes $|F'|'''_{ty^2}$ $|F'|'''_{tyz}$ et $|F'|'''_{t^2y}$.

Leur détermination se fera par suite dans cet ordre. Les équations matricielles correspondantes sont alors :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(1-\mu^2)U|\bar{X}|\circ|F'|'''_{ty^2}+(1-\mu^2)(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt})|\bar{X}|\circ|F'|''_{y^2}+4(1-\mu^2)A|\bar{X}|\circ|F'|''_{ty}+\\
&+(1-\mu^2)U\frac{\partial^2|\bar{X}|}{\partial y^2}|F'|'_t+2(1-\mu^2)(f''^2_{y^2}+f''^2_{zy}+C)|\bar{X}|\circ|F'|'_t+2(1-\mu^2)U\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial y}\circ|F'|''_{ty}+\\
&+4(1-\mu^2)A\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial y}\circ|F'|'_t+(1-\mu^2)(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt})|\bar{X}|\circ|F'|'_y+\\
&+2(1-\mu^2)\left[f'_y F'''_{ty^2}+f'_z F'''_{tyz}+f''_{y^2} F''_{ty}+f''_{zy} F''_{tz}\right]|\bar{X}|\circ|F'|'_y+\\
&+(1-\mu^2)\left(\frac{F'_t}{U}-\frac{\bar{o}^2}{F'_t}\right)\left[2f''_{y^2}F'''_{ty^2}+2f''_{zy}F'''_{tzy}+f'_z F^{IV}_{tzy^2}+f'_y F^{IV}_{ty^3}+F''_{ty}f'''_{y^3}+F''_{tz}f'''_{zy^2}\right]=A_x F'''_{ty^2}
\end{aligned}
\right. \tag{2-10-1}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(1-\mu^2)U|\bar{X}|\circ|F'|'''_{tyz}+(1-\mu^2)U\frac{\partial^2|\bar{X}|}{\partial z\partial t}\circ|F'|'_y+(1-\mu^2)U\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial t}\circ|F'|''_{yz}+2(1-\mu^2)B\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial y}\circ|F'|'_t+\\
&+2(1-\mu^2)A\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial z}\circ|F'|'_t+(1-\mu^2)(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt})\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial z}\circ|F'|'_y+(1-\mu^2)U\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial z}\circ|F'|''_{yt}+\\
&+(1-\mu^2)B|X|\circ|F'|''_{ty}+2(1-\mu^2)A|X|\circ|F'|''_{tz}+(1-\mu^2)(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt})|\bar{X}|\circ|F'|''_{yz}+\\
&+(1-\mu^2)\left[F''_{yt}f''_{yz}+F''_{zt}f''_{z^2}+F'''_{zyt}f'_y+F'''_{z^2t}f'_z\right]|\bar{X}|\circ|F'|'_y+2(1-\mu^2\left[G+f''_{y^2}f''_{zy}+f''_{z^2}f''_{zy}\right]|\bar{X}|\circ|F'|'_t+\\
&+(1-\mu^2)\left(F''_{yt}f''_{y^2}+F''_{zt}f''_{zy}+F'''_{y^2t}f'_y+F'''_{zyt}f'_z\right)|\bar{X}|\circ|F'|'_z+\\
&+(1-\mu^2)\left(\frac{F'_t}{U}-\frac{\bar{o}^2}{F'_t}\right)\left[F^{IV}_{zy^2t}f'_y+F^{IV}_{z^2yt}f'_z+F'''_{zyt}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)+F'''_{y^2t}f''_{yz}+F'''_{z^2t}f''_{zy}+F''_{yt}f'''_{y^2z}+F''_{zt}f'''_{yz^2}\right]=\\
&=A_x F'''_{zyt}
\end{aligned}
\right. \tag{2-10-2}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(1-\mu^2)U|\bar{X}|\circ|F'|'''_{t^2y}+(1-\mu^2)(f'_y F'''_{t^2y}+f'_z F'''_{t^2z})|\bar{X}|\circ|F'|'_y+2(1-\mu^2)(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt})|\bar{X}|\circ|F'|''_{ty}+\\
&+2(1-\mu^2)A|\bar{X}|\circ|F'|''_{t^2}+2(1-\mu^2)\left[f'_y F'''_{ty^2}+f'_z F'''_{tzy}+f''_{y^2}F''_{ty}+f''_{zy}F''_{tz}\right]|\bar{X}|\circ|F'|'_t+\\
&+(1-\mu^2)U\frac{\partial^2|\bar{X}|}{\partial y\partial t}|F'|'_t+(1-\mu^2)U\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial y}|F'|''_{t^2}+(1-\mu^2)U\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial t}|F'|''_{ty}+2(1-\mu^2)A\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial t}|F'|'_t+\\
&+2(1-\mu^2)(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt})\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial y}|F'|'_t+(1-\mu^2)\left(\frac{F'_t}{U}-\frac{\bar{o}^2}{F'_t}\right)\left[f'_y F^{IV}_{t^2y^2}+f'_z F^{IV}_{t^2zy}+f''_{y^2}F'''_{t^2y}+f''_{zy}F'''_{t^2z}\right]=\\
&=A_x F'''_{t^2y}
\end{aligned}
\right. \tag{2-10-3}
$$

La complexité de ces équations apparait à la lumière des expressions (2-7-6) qu'il faut dériver encore une fois. Toutefois chacune de ces équations fournit les inconnues en fonction de quantités d'ordre moindre, ces inconnues dépendant en outre du nombre de variables utilisées.

— On a poursuivi le calcul complètement en se plaçant au sommet de l'obstacle. En ce point on a : $f'_y = f'_z = 0$ et $U = 1$ ce qui allège les écritures. Dans ces conditions les équations (2-10-1) (2-10-2) et (2-10-3) déterminent, toutes réductions faites, les valeurs suivantes :

- A) Mouvements (E) :

$$(2\text{-}10\text{-}3)\quad \left\{\begin{array}{l} \left[F^{IV}_{t^2y^2}(0\,0\,0)\right]_{(E)} = 4\sigma^{-2}\dfrac{M^2}{M^2+1}\left[f''_{y^2}\left(f''^2_{y^2}+f''^2_{zy}\right)+f''^2_{zy}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)\right] - \\ -2\dfrac{\xi''_{t^2}(0).M^2}{(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)(\Delta)(M^2+1)^2}\left[(\Delta)M^2-(M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]\right]\left(f''^2_{y^2}+f''^2_{zy}\right)+ \\ +2\sigma^{-2}\dfrac{\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]}{(\Delta)(M^2+1)^2}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)\left(f''^2_{y^2}+f''^2_{zy}\right) \end{array}\right.$$

$$(2\text{-}10\text{-}4)\quad \left\{\begin{array}{l} \left[F^{IV}_{t^2yz}(0\,0\,0)\right]_{(E)} = 4\sigma^{-2}\dfrac{M^2}{M^2+1}f''_{zy}\left(f''^2_{y^2}+f''^2_{z^2}+f''_{y^2}f''_{z^2}+f''^2_{zy}\right) - \\ -2\dfrac{\xi''_{t^2}(0).M^2}{(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)(\Delta)(M^2+1)^2}\left[(\Delta)M^2-(M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]\right]f''_{zy}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)+ \\ +2\sigma^{-2}\dfrac{\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]}{\Delta(M^2+1)^2}f''_{zy}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)^2 \end{array}\right.$$

$$(2\text{-}10\text{-}5)\quad \left[F^{IV}_{t^3y}(0\,0\,0)\right]_{(E)} = 0$$

- B) Mouvements (R) :

Il suffit de considérer la seule inconnue $F^{IV}_{t^2y^2}(0\,0)$ dont l'expression a pour valeur :

$$(2\text{-}10\text{-}5)\quad \left\{\begin{array}{l} \left[F^{IV}_{t^2y^2}(0\,0)\right]_{(R)} = -2\dfrac{\xi''_{t^2}(0).M^2}{(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)(\Delta)(M^2+1)^2}\left[(\Delta)M^2-(M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]\right]f''^2_{zy} \\ +4\sigma^{-2}\dfrac{(\Delta)M^2(M^2+1)+\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]}{(\Delta)(M^2+1)^2}.f''^3_{zy} \\ \left[F^{IV}_{t^3y}(0\,0)\right]_{(R)} = 0 \end{array}\right.$$

Les autres dérivées n'étant pas à considérer.

— Dans les formules précédentes le nombre de Mach normal initial M est pris au

sommet de l'obstacle.Sa valeur résultant de (2-2-4) est :

$$(2\text{-}10\text{-}6)\qquad M(0\,0)=\frac{\xi'_t(0)}{2\bar{c}(1-\mu^2)}+\sqrt{\left[\frac{\xi'_t(0)}{2\bar{c}(1-\mu^2)}\right]^2+1}$$

On aurait la formule analogue à (2-10-3) pour $F^{IV}_{t^2_2}(0\,0\,0)$.

On connait donc actuellement l'ensemble des dérivées initiales d'ordre quatre de F à l'exception de $F^{IV}_{t^4}(y\,z\,o)$ dont le calcul peut alors être effectué complètement si l'on se place au sommet de l'obstacle.

11) Valeurs initiales de $F^{IV}_{t^4}(0)$

Elles résultent de la matrice colonne $|F'|'''_{t^4}$ qui est déterminée par l'équation :

$$\begin{cases}(1-\mu^2)U|\bar{X}|\cdot|F'|'''_{t^3}+3(1-\mu^2)\left(f'_yF''_{yt}+f'_zF''_{zt}\right)|\bar{X}|\cdot|F'|''_{t^2}+3(1-\mu^2)\left(f'_yF'''_{t^2y}+f'_zF'''_{t^2z}\right)|\bar{X}|\cdot|F'|'_t\\ +2(1-\mu^2)U\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial t}\cdot|F'|''_{t^2}+3(1-\mu^2)\left(f'_yF''_{yt}+f'_zF''_{zt}\right)\frac{\partial|\bar{X}|}{\partial t}|F'|'_t+(1-\mu^2)U\frac{\partial^2|\bar{X}|}{\partial t^2}\cdot|F'|'_t+\\ +(1-\mu^2)\left(\frac{F'_t}{U}-\frac{\bar{c}^2}{F'_t}\right)\left(f'_yF^{IV}_{t^3y}+f'_zF^{IV}_{t^3z}\right)=\xi^{IV}_{t^4}(0)+A_x\left[F'''_{t^3}(y\,z\,o)-\xi'''_{t^3}(0)\right]\end{cases}\qquad(2\text{-}11\text{-}1)$$

Tous les éléments de cette équation sont connus mais il est plus simple en utilisant (2-9-2) et (2-9-4)d'éliminer $F^{IV}_{yt^3}$ et $F^{IV}_{zt^3}$.Cela permet d'exprimer $F^{IV}_{t^4}$ en fonction de $F^{IV}_{t^2y^2}$, $F^{IV}_{t^2z^2}$, $F^{IV}_{t^2yz}$ et des dérivées d'ordre inférieur seulement.On obtient ainsi :

$$\begin{cases}F^{IV}_{t^4}(y\,z\,o)=\frac{M^2}{(1-\mu^2)(M^2+1)}\xi^{IV}_{t^4}(0)+\frac{M^2}{(1-\mu^2)(M^2+1)}\cdot A_x\left[F'''_{t^3}(y\,z\,o)-\xi'''_{t^3}(0)\right]+\frac{6}{\bar{c}M(M^2+1)}\cdot\frac{\left(F'''_{t^3}\right)\left(F''_{t^2}\right)}{\sqrt{U}}-\\ -\frac{6\left(F''_{t^2}\right)^3}{\bar{c}^2M^2(M^2+1)}\cdot\frac{1}{U}-\bar{c}^2\frac{M^4-1}{M^2+1}\cdot\frac{f'^2_yF^{IV}_{t^2y^2}+f'^2_zF^{IV}_{t^2z^2}+2f'_yf'_zF^{IV}_{t^2yz}}{U}+2\bar{c}^2\frac{M^4(M^2-1)}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{\left(Af'_y+Bf'_z\right)\left[f'_yF''_{yt^2}+f'_zF''_{zt^2}\right]}{U^2}\\ -4\bar{c}\frac{M^4(M^2-1)}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{f'_yF''_{yt}F'''_{y^2t}+f'_zF''_{zt}F'''_{z^2t}+\left(f'_yF''_{yt}+f'_zF''_{zt}\right)F'''_{yzt}}{U\sqrt{U}}-\bar{c}^2\frac{M^2(M^2-1)}{M^2+1}\cdot\frac{AF'''_{yt^2}+BF'''_{zt^2}}{U}+\\ +16\bar{c}^3\frac{M^5(M^2-1)}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{\left(Af'_y+Bf'_z\right)\left[f'^2_yF'''_{ty^2}+f'^2_zF'''_{tz^2}+2f'_yf'_zF'''_{tyz}\right]}{U^2\sqrt{U}}-4\bar{c}\frac{M(M^2-1)}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{Af'_y+Bf'_z}{U\sqrt{U}}\left(F'''_{t^3}\right)+\\ +2\bar{c}\frac{M^3(M^2-1)}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{\left(F''_{t^2}\right)\left[f'^2_yF'''_{y^2t}+f'^2_zF'''_{z^2t}+2f'_yf'_zF'''_{yzt}\right]}{U\sqrt{U}}+6\bar{c}\frac{M^3}{M^2+1}\left(F''_{yt}F'''_{yt^2}+F''_{zt}F'''_{zt^2}\right)+\\ +\frac{(3M^2-1)(M^2-1)}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{\left(F''_{t^2}\right)\left(f'_yF'''_{yt^2}+f'_zF'''_{zt^2}\right)}{U}-6\bar{c}^2\frac{M^2\left[(M^2-1)^2+4M^2(M^2+1)\right]}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{Af'_y+Bf'_z}{U^2}\left(f'_yF'''_{yt^2}+f'_zF'''_{zt^2}\right)\\ +4\bar{c}\frac{M(M^2-1)}{(M^2+1)^2}\frac{Af'_y+Bf'_z}{U\sqrt{U}}\left(F'''_{t^3}\right)-\frac{4(M^2-1)}{(M^2+1)^2}\frac{Af'_y+Bf'_z}{U^2}\left(F''_{t^2}\right)^2+\frac{6(3M^2-1)}{(M^2+1)^3}\frac{Af'_y+Bf'_z}{U^2}\left(F''_{t^2}\right)^2+\\ +16\bar{c}^4\frac{M^6(M^2-1)}{M^2+1}\frac{\Omega(A^2+B^2)}{U^2\sqrt{U}}-16c^2\frac{M^2(M^2-1)}{(M^2+1)^4}\cdot\frac{\Omega^2}{U^3}\left(F''_{t^2}\right)-4c^2\frac{M^2(M^2-1)^2}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{A^2+B^2}{U^2}\left(F''_{t^2}\right)+\\ +32c^4\frac{M^6(M^2-1)}{(M^2+1)^4}\cdot\frac{\Omega^3}{U^4}+16\bar{c}^4\frac{M^6(M^2-1)}{(M^2+1)^5}\frac{\Omega}{U^4}\left[(A^2f'_y+B^2f'_z)(f'_y+f'_z)+2\Omega^2-U(A^2+B^2)\right]+\cdots\cdots>\end{cases}\qquad(2\text{-}11\text{-}2)$$

$$\left\{ +\frac{16\bar{o}^4M^6(M^2-1)}{(M^2+1)^4}\cdot\frac{(A^2+B^2)}{U^2\sqrt{U}} - \frac{\bar{o}}{1-\mu^2}\cdot\frac{\left[f'_y F'''_{t^2y} + f'_z F'''_{t^2z}\right]}{\sqrt{U}}\cdot A_x \right.$$

Théoriquement cette formule et les équations (2-10-1) et (2-10-2) déterminent $F^{IV}_{t^4}(y\,z\,o)$. Mais comme dans le cas de $F^{IV}_{t^2y^2}$ et $F^{IV}_{t^2yz}$, si l'on veut rester dans des limites raisonnables d'écriture, il est nécessaire de se placer encore au contact, ce que l'on fera. Dans ces conditions on peut développer complètement (2-11-2).

- Mouvements (E) :

$$\left\{ \left[F''_{t^2}(0\,0\,0)\right]_{(E)} = \frac{M^2(M^2-1)}{(1-\mu^2)(\Delta)}\xi''_{t^2}(0) - \bar{o}^2\frac{(A_2)}{(\Delta)}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right) \right.$$

$$\left[A_x(0\,0\,0)\right]_{(E)} = \frac{-\xi''_{t^2}(0)M}{\bar{o}(\mu^2M^2+1-\mu^2)} + \frac{1-\mu^2}{\bar{c}}\cdot\frac{(M^2+1)}{M(\mu^2M^2+1-\mu^2)}\left[F''_{t^2}(0\,0\,0)\right]_{(E)}$$

(2-11-3)

$$\left[F'''_{t^3}(0\,0\,0)\right]_{(E)} = \frac{M^2}{(1-\mu^2)(M^2+1)}\xi'''_{t^3}(0) + \bar{o}^3\frac{(A_3)}{M(M^2+1)(\Delta)^2}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)^2 +$$

$$+\frac{\bar{o}}{1-\mu^2}\cdot\frac{M(B_3)\xi''_{t^2}(0)}{(M^2+1)(\Delta)^2}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right) + \frac{\bar{o}^3(C_3)\cdot\left[\xi''_{t^2}(0)\right]^3}{\bar{o}(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2+1)(\Delta)^2}$$

Dans cette hypothèse la formule (2-11-2) est réduite à ses premiers termes. Elle s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\left\{ \left[F^{IV}_{t^4}(0\,0\,0)\right]_{(E)} = \frac{M^2}{(1-\mu^2)(M^2+1)}\xi^{IV}_{t^4}(0) + \frac{\bar{o}^4(A_4)}{(M^2+1)^2M^2(\Delta)^3}\cdot\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)^3 - \right.$$

$$-\frac{M^3}{\bar{o}(1-\mu^2)^3}\cdot\frac{(B_4)}{(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)(\Delta)}\xi''_{t^2}(0)\xi'''_{t^3}(0) + \frac{\bar{o}\,M(C_4)}{(1-\mu^2)(M^2+1)(\Delta)}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)\xi'''_{t^3}(0) +$$

(2-11-4)

$$+\frac{1}{\bar{o}^2(1-\mu^2)^3}\cdot\frac{M^2(D_4)}{(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)(\Delta)^3}\left[\xi''_{t^2}(0)\right]^3 + \frac{\bar{o}^2}{1-\mu^2}\cdot\frac{(E_4)}{(M^2+1)^2(\Delta)^3}\cdot\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)^2\xi''_{t^2}(0) +$$

$$+\frac{1}{(1-\mu^2)^2}\cdot\frac{(F_4)}{(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)(\Delta)^3}\cdot\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)\left[\xi''_{t^2}(0)\right]^2$$

La quantité (Δ) est déjà définie en fonction de M et de μ^2 et on a posé :

$$
\begin{cases}
(A_4)=(\mu^2M^2+1-\mu^2)\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right]^3(M^2-1)^3\left[M^8+2M^6(-3\mu^4+4\mu^2+1)+3M^4(6\mu^4-4\mu^2+3)+\right.\\
\qquad\left.+\left[2M^2(-9\mu^4+8\mu^2+1)+6(1-\mu^2)^2\right]\right]\\
(B_4)=(\Delta)(\mu^2M^2+\mu^2-1)+(M^2-1)\left[-\mu^2M^4+(1-8\mu^2)M^2+5(\mu^2-1)\right]\\
(C_4)=\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)\left[\mu^2M^4-(1-8\mu^2)M^2-5(\mu^2-1)\right]\\
(D_4)=-(\Delta)^2M^2\left[3\mu^2(1-\mu^2)M^4+(2\mu^4-5\mu^2+3)M^2+(1-\mu^2)^2\right]+\\
\qquad+(\Delta)(M^2-1)\left[3\mu^2M^8+M^6(\mu^2)+M^4(18\mu^4-13\mu^2-3)+M^2[-12\mu^4+27\mu^2-17]-6\mu^4+14\mu^2-8\right]+\\
\qquad+(M^2-1)^2\left[3M^8+M^6(12\mu^2+2)+M^4(-12\mu^2+19)+M^2(12\mu^2+2)+12-12\mu^2\right]\\
(E_4)=3\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right]^2(M^2-1)^3\left[M^8+M^6(-6\mu^4+8\mu^2+2)+M^4(18\mu^4-12\mu^2+9)+M^2(-18\mu^4+16\mu^2+2)+\right.\\
\qquad\left.+6(1-\mu^2)^2\right]-\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right]^2(M^2-1)^2(\Delta)\left[M^6+M^4(2\mu^2+2)+M^2(3\mu^2+5)+7-7\mu^2\right]\\
(F_4)=\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)M^2(\Delta)^2\left[M^4(-2\mu^2+3)+M^2(-6\mu^4+4\mu^2+2)+6(1-\mu^2)^2\right]+\\
\qquad+\left[(1-\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)^2M^2(\Delta)\left[(\mu^2-2)M^6+(6\mu^4-19\mu^2-7)M^4+(6\mu^4+12\mu^2-24)M^2-12(1-\mu^2)^2\right]\\
\qquad+\left[(1-\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)^2M^2\left[2M^{10}+M^8(-18\mu^4+18\mu^2+3)+M^6(72\mu^4-66\mu^2+16)+\right.\\
\qquad\left.+M^4(-108\mu^4+114\mu^2-33)+M^2(72\mu^4-102\mu^2+30)-18(1-\mu^2)^2\right]
\end{cases}
\tag{2-11-5}
$$

L'expression analogue relative aux mouvements (P) s'en déduit en annulant f''_{z^2}.

- Mouvements (R) :

Les formules nécessaires (2-4-8) et (2-8-5) sont relatives à un point quelconque. Elles font apparaitre la distance y d'un point de l'obstacle à l'axe de révolution contenant le sommet. Le choix des axes fixes entraine, en vertu des conditions d'analyticité supposées remplies dans les calculs, que $\frac{f'}{y} \to f''(0)$ pour $y \to 0$. Par suite les formules analogues à (2-11-3) sont :

$$
\begin{cases}
\left[F''_{t^2}(0\,0)\right]_{(R)}=\dfrac{M^2(M^2-\quad)}{(1-\mu^2)(\Delta)}\,\xi''_{t^2}(0)-2\,\bar{o}^2\,\dfrac{(A_2)}{(\Delta)}\,f''\\
\left[A_x(0\,0)\right]_{(R)}=\dfrac{-\xi''_{t^2}(0)\,M}{\bar{o}(\mu^2M^2+1-\mu^2)}+\dfrac{1-\mu^2}{\bar{o}}\cdot\dfrac{M^2+1}{M(\mu^2M^2+1-\mu^2)}\left[F''_{t^2}(0\,0)\right]_{(R)}\\
\left[F'''_{t^3}(0\,0)\right]_{(R)}=\left[F'''_{t^3}(0\,0)\right]_{(P)}+\dfrac{\bar{o}^3\left[(G_3)+2(A_3)\right]}{M(M^2+1)(\Delta)^2}\,f''^2-\dfrac{\bar{o}}{1-\mu^2}\cdot\dfrac{M(I_3)}{(M^2+1)(\Delta)}\,f''\left[\xi''_{t^2}(0)\right]
\end{cases}
\tag{2-11-6}
$$

La formule analogue à (2-11-4) s'écrit alors :

$$
\begin{aligned}
\left[F^{IV}_{t^4}(0\,0)\right]_{(R)}=&\frac{M^2}{(1-\mu^2)(M^2+1)}\,\xi^{IV}_{t^4}(0)+\bar{o}^4\frac{(A_4)}{(M^2+1)^2M^2(\Delta)^3}\,f''^3-\\
&-\frac{M^3}{\bar{o}(1-\mu^2)^2}\cdot\frac{(B_4)}{(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)(\Delta)}\,\xi''_{t^2}(0)\,\xi'''_{t^3}(0)+2\,\frac{\bar{o}\,M(C_4)}{(1-\mu^2)M^2+1)^2(\Delta)}\,f''\left[\xi'''_{t^3}(0)\right]+\\
&+\frac{1}{\bar{o}^2(1-\mu^2)^3}\,\frac{M^2(D_4)}{(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)(\Delta)^3}\left[\xi''_{t^2}(0)\right]^3+\frac{\bar{o}^2}{1-\mu^2}\cdot\frac{(G_4)}{(M^2+1)^2(\Delta)^3}\,f''\cdot\left[\xi''''_{t^2}(0)\right]+\\
&+\frac{1}{(1-\mu^2)^2}\cdot\frac{(H_4)}{(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)(\Delta)^3}\,f''\cdot\left[\xi''_{t^2}(0)\right]^2
\end{aligned}
\tag{2-11-7}
$$

où les coefficients $(\Delta),(A_4),(B_4),(C_4)$ et (D_4) sont définis à partir de (2-11-5) et où l'on a posé les nouveaux coefficients :

$$
\left\{
\begin{aligned}
(G_4) &= \left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right]^2(M^2-1)^2(\Delta)\left[-4M^6+M^4(-6\mu^4-2\mu^2-4)+M^2(2\mu^2-8)+6(1-\mu^2)^2\right]+\\
&\quad+\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right]^2(M^2-1)^2\left[\begin{array}{l}4M^{10}+M^8(-72\mu^4+2\mu^2+4)+M^6(144\mu^4-122\mu^2-2)+\\ +M^4(142\mu^2-76)+M^2(-144\mu^4+174\mu^2-26)+7\mu^4-96\mu^2+24\end{array}\right]\\
(H_4) &= 2(\Delta)^2\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)M^4\left[(-3\mu^4+6\mu^2)M^4+(-7\mu^2+8)M^2+3\mu^4-7\mu^2+4\right]+\\
&\quad+\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)^2M^2(\Delta)\left[\begin{array}{l}-12\mu^2M^8+M^6(-24\mu^4+2\mu^2-20)+M^4(52\mu^4-54\mu^2-16)+\\ +M^2(46\mu^2-46)-6(1-\mu^2)^2\end{array}\right]+\\
&\quad+\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)M^2\left[\begin{array}{l}4M^{12}+M^{10}(-36\mu^4+36\mu^2)+M^8(156\mu^4-144\mu^2+\ldots)+\\ +M^6(-258\mu^4+228\mu^2-72)+M^4(252\mu^4-162\mu^2+\ldots)+\\ +M^2(-162\mu^4+108\mu^2-54)+18(1-\mu^2)^2\end{array}\right]
\end{aligned}
\right. \qquad (2\text{-}11\text{-}3)
$$

Evidemment dans toutes les formules de ce paragraphe à l'exception de la formule (2-11-2),M désigne le nombre de Mach normal initial au sommet défini par (2-10-6).

- En conclusion les valeurs des 3 dérivées premières,des 6 dérivées secondes et des 10 dérivées troisièmes de la fonction représentant la surface du choc sont connues en tout point (0 y z).Les valeurs des 15 dérivées quatrièmes ne sont connues pour la plupart qu'au point (0 0 0) choisi comme sommet.On verra le parti que l'on peut en tirer pour la solution du problème des chocs.

Chapitre III

- Chocs détachés au voisinage du départ -

1) Sur les chocs instationnaires

La détermination des chocs détachés et de l'écoulement aval correspondant est un problème plus complexe que celui des chocs attachés. Pour des écoulements quelconques le caractère instationnaire ne fait qu'augmenter la difficulté, l'écoulement derrière un choc non uniforme se propageant dans un fluide au repos n'étant plus isentropique qu'il y ait ou non attachement. Les résultats concernant les écoulements instationnaires sont les moins nombreux. On peut citer les problèmes relatifs au mouvement d'un point étudié par Esclangon et Lilley. Un cas remarquable d'intégration des équations du mouvement est étudié par Stanjukovich : c'est celui des mouvements rectilignes non isentropiques. R.E. Meyer a étudié d'autre part les problèmes de stabilité de ces chocs. A côté des mouvements rectilignes on peut aussi citer les travaux de G.I. Taylor relatifs aux ondes de choc sphériques ainsi que ceux de Whitham. Une mention spéciale doit être faite en ce qui concerne la courbure des chocs attachés instationnaires étudiée par Cabannes qui utilise une méthode globale, t restant arbitraire, en se plaçant localement au voisinage de la pointe.

Soit alors un obstacle dont l'équation est analytique et convexe vers l'amont de l'écoulement. Supposons que les conditions au départ soient telles qu'un choc soit créé instantanément. Dans ces conditions le choc créé en avant du nez est nécessairement détaché de l'obstacle. Les calculs du chapitre II sont ici valables. Par conséquent les 34 dérivées de l'équation $x = F(y\,z\,t)$ de la surface de choc sont connues pour $t = 0$. On a amorcé le calcul des dérivées d'ordre supérieur qui demeure possible quel que soit l'ordre comme il a été indiqué.

Par conséquent la méthode du départ fait correspondre à un obstacle convexe analytique une onde de choc analytique qui sera déterminée jusqu'au 4ème ordre.

2) Distance des sommets parallèlement à la vitesse

Le sommet de l'obstacle est le point où le plan tangent est perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Le point correspondant sur le choc parallèlement à la vitesse est le sommet de ce dernier. La distance de ces points résulte de la fonction :

(3-2-1) $$h(t) = F(y,z,t) - f(y,z) - \zeta(t)$$

Cette fonction analytique de t peut se représenter dans un intervalle (0,t), nécessairement non nul, par un développement de Taylor. On peut exprimer les coefficients de ce développement en fonction des expressions générales des dérivées de F(y z t) en se plaçant au sommet de l'obstacle. En ce point on a : U = 1. Ensuite des relations (2-2-3) et (2-2-4) il résulte que :

$$F'_t(0) - \xi'_t(0) = \bar{o}\, M - \xi'_t(0)$$

en continuant à désigner par M la valeur du nombre de Mach normal initial au sommet c'est-à-dire d'après (2-2-4) :

$$M = \frac{\xi'_t(0)}{2(1-\mu^2)\,\bar{o}} + \sqrt{\left(\frac{\xi'_t(0)}{2(1-\mu^2)\,\bar{o}}\right)^2 + 1}$$

c'est-à-dire aussi en introduisant le nombre de Mach $\mathcal{M}$ de l'écoulement amont non perturbé :

(3-2-3)
$$M = \frac{\mathcal{M}}{2(1-\mu^2)} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{4(1-\mu^2)^2} + 1}$$

Les autres coefficients dépendent du nombre de variables utilisées.

Ecoulements (E) et (P) :

Si l'on considère les expressions des dérivées de F à partir du second ordre, on s'aperçoit qu'elles ne dépendent de la géométrie de l'obstacle que par les notations (2-1-1). Or si l'on se place au sommet de l'obstacle ces notations se réduisent à zéro sauf U qui se réduit à l'unité. Dans ces conditions si ω désigne la courbure moyenne du sommet de l'obstacle, les expressions (2-4-5) (2-8-4) et (2-11-4) donnant F''_{t^2}, F'''_{t^3} et $F^{IV}_{t^4}$ ne dépendent que de μ^2, de M, de $\bar{o}$ et de ω lorsqu'on se place au sommet. Par conséquent :

Au 4ème ordre en t, la distance des sommets h(t) ne dépend donc de la forme de l'obstacle que par sa courbure moyenne au sommet. On obtient :

(3-2-4)
$$\boxed{h(t) = \bar{o}\, t\, M - t\, \xi'_t + h_2 t^2 + h_3 t^3 + h_4 t^4 + \mathcal{O}(t^5)}$$

avec les valeurs suivantes :

$$
\left\{
\begin{aligned}
h_2 &= \frac{M^2(M^2-1)}{2(1-\mu^2)\,\Delta}\,\xi''^{\,2}_{t} + \bar{o}^{\,2}\,\frac{A_2}{2\,\Delta}\cdot\omega \\
h_3 &= \bar{o}^{\,3}\,\frac{A_3}{6M(M^2+1)\Delta^2}\cdot\omega^2 - \frac{\bar{o}}{6(1-\mu^2)}\cdot\frac{M.B_3}{(M^2+1)\,\Delta^2}\cdot\xi''^{\,2}_{t}\cdot\omega + \frac{M^2}{6(1-\mu^2)(M^2+1)}\cdot\xi''^{\,3}_{t} + \\
&\quad + \frac{M^3 B_3}{6\,\bar{o}(1-\mu^2)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2+1)\Delta^2}\cdot(\xi''^{\,2}_{t})^2 \\
h_4 &= \frac{M^2}{24(1-\mu^2)(M^2+1)}\cdot\xi^{IV}_{t^4} - \frac{\bar{o}^{\,4}\,A_4}{24(M^2+1)^2M^2\Delta^3}\cdot\omega^3 - \frac{M^3\,B_4}{24\bar{o}(1-\mu^2)^3(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta}\,\xi''^{\,2}_{t}\xi''^{\,3}_{t} \\
&\quad - \frac{\bar{o}\,M\,C_4}{24(1-\mu^2)(M^2+1)\Delta}\,\xi'''^{\,3}_{t}\cdot\omega + \frac{M^2\,D_4}{24\bar{o}^{\,2}(1-\mu^2)^3(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta^3}(\xi''^{\,2}_{t})^3 + \\
&\quad + \frac{\bar{o}^{\,2}\,E_4}{24(1-\mu^2)(M^2+1)^2\Delta^3}\,\xi''^{\,2}_{t}\omega^2 - \frac{F_4}{24(1-\mu^2)^2(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta^3}(\xi''^{\,2}_{t})^2\omega
\end{aligned}
\right. \qquad (3\text{-}2\text{-}5)
$$

dont les coefficients $A_i, B_i \ldots$ sont connus en fonction de μ^2 et de M.

Dans le cas où le mouvement de l'obstacle est réduit à une translation uniforme la formule se simplifie notablement et se réduit à :

$$
\boxed{h(t) = \bar{o}\,t\,M - t\,\xi'_t - C\,\omega(\bar{o}t)^2 + D\,\omega^2(\bar{o}t)^3 - E\,\omega^3(\bar{o}t)^4 + \mathcal{O}(t^5)} \qquad (3\text{-}2\text{-}6)
$$

avec les valeurs :

$$
\left\{
\begin{aligned}
C(M,\mu^2) &= \frac{(\mu^2M^2+1-\mu^2)\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)}{2\left[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2\right]} \\
D(M,\mu^2) &= \frac{\left[M^4+(2\mu^2+1)M^2+2(1-\mu^2)\right](\mu^2M^2+1-\mu^2)\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right]^2(M^2-1)^2}{6M(M^2+1)\left[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2\right]^2} \\
E(M,\mu^2) &= \frac{\left[\begin{matrix}M^8+(-6\mu^4+8\mu^2+2)M^6+(18\mu^4-12\mu^2+9)M^4 \\ +(-18\mu^4+16\mu^2+2)M^2+6(1-\mu^2)^2\end{matrix}\right](\mu^2M^2+1-\mu^2)\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right]^3(M^2-1)^3}{24M^2(M^2+1)^2\left[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2\right]^3}
\end{aligned}
\right. \qquad (3\text{-}2\text{-}7)
$$

Des résultats précédents on déduit les formules analogues relatives aux mouvements P pour lesquels ω se réduit à $\frac{1}{R_1}$, R_1 étant le rayon de courbure au sommet de la section de l'obstacle par le plan $z = 0$.

Ecoulements (R) :

En écoulement de révolution, les sommets sont nécessairement sur l'axe de révolution Or, si R est le rayon de courbure au sommet de la méridienne de l'obstacle, compté positivement vers les abscisses négatives, on a :

$$\lim \frac{f'_y}{y} = -\frac{1}{R} \quad \text{pour} \quad y \to 0$$

Dans ces conditions en se plaçant au sommet de l'obstacle, les formules (2-4-8) (2-8-5) et (2-11-7) montrent que F''_{t^2} F'''_{t^3} $F^{IV}_{t^4}$ ne dépendent plus que de M, de $\bar{c}$, de μ^2 et de $1/R$. Elles s'écrivent :

(3-2-8)

$$[F''_{t^2}(0,0)]_R = \frac{M^2(M^2-1)}{(1-\mu^2)\Delta}\,\xi''_{t^2} + 2\,\bar{c}^2 \cdot \frac{A_2}{\Delta} \cdot \frac{1}{R}$$

$$[F'''_{t^3}(0,0)]_R = [F'''_{t^3}]_P + \bar{c}^3 \cdot \frac{G_3}{M(M^2+1)\Delta^2} \cdot \frac{1}{R^2} + 2\,\bar{c}^3 \cdot \frac{A_3}{M(M^2+1)\Delta^2} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\bar{c}}{1-\mu^2} \cdot \frac{M.I_3}{(M^2+1)\Delta^2}\,\xi''_{t^2} \cdot \frac{1}{R}$$

$$[F^{IV}_{t^4}(0,0)]_R = \frac{M^2}{(1-\mu^2)(M^2+1)}\,\xi^{IV}_{t^4} - 8\bar{c}^4 \frac{A_4}{(M^2+1)^2 M^2 \Delta^3} \cdot \frac{1}{R^3} - 2\,\frac{\bar{c}}{1-\mu^2}\,\frac{M\,C_4}{(M^2+1)^2\Delta}\,\xi'''_{t^3} \cdot \frac{1}{R} - \frac{1}{\bar{c}(1-\mu^2)^2} \cdot \frac{M^3 B_4}{(M^2+1)^2(\mu^2 M^2+1-\mu^2)\Delta}\,\xi''_{t^2}\xi'''_{t^3} + \frac{1}{\bar{c}^2(1-\mu^2)^3} \cdot \frac{M^2 D_4}{(M^2+1)^2(\mu^2 M^2+1-\mu^2)\Delta^3}(\xi'''_{t^2})^3 + \frac{\bar{c}^2}{1-\mu^2} \cdot \frac{G_4}{(M^2+1)^2\Delta^3}\,\xi''_{t^2} \cdot \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(1-\mu^2)^2} \cdot \frac{H_4}{(M^2+1)^2(\mu^2 M^2+1-\mu^2)\Delta^3}(\xi''_{t^2})^2 \cdot \frac{1}{R}$$

où les coefficients tels que A_i B_i ..... sont connus en fonction de M et de μ^2 et où $[F'''_{t^3}]_P$ est la valeur $\frac{1}{6}h_3$ définie par (3-2-5), lorsqu'elle est indépendante de z.

- Dans ces conditions le développement de h(t) ne dépend plus de la géométrie de l'obstacle que par la courbure au sommet de la méridienne. Il s'écrit :

$$(3\text{-}2\text{-}9) \qquad \boxed{h(t) = \bar{c}t\, M - t\,\xi'_t + \frac{t^2}{2} F''_{t^2} + \frac{t^3}{6} F'''_{t^3} + \frac{t^4}{24} F^{IV}_{t^4} + \theta(t^5)}$$

Dans l'hypothèse où le mouvement de l'obstacle est uniforme le développement plus simple s'écrit :

$$(3\text{-}2\text{-}10) \qquad \boxed{h(t) = \bar{c}t\, M - t\,\xi'_t - 2C\frac{1}{R}(\bar{c}t)^2 + 4D\frac{1}{R^2}(\bar{c}t)^3 - 8E\frac{1}{R^3}(\bar{c}t)^4 + \theta(t^5)}$$

les coefficients étant définis par la formule (3-2-7).

3) Courbures des chocs en leur sommet.

Si l'on désigne par C(t) l'une des courbures moyenne ou totale en un point de la surface du choc, les conclusions d'analyticité de l'équation de cette surface permettent d'écrire :

$$(3\text{-}3\text{-}1) \qquad C(t) = C(0) + t\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_0 + \frac{t^2}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_0 + \theta(t^3)$$

valable dans un intervalle (0,t) qui ne se réduit pas à zéro.

Dans le cas des écoulements (E) si Ω(t) désigne la courbure moyenne on aura :

$$(3\text{-}3\text{-}2) \qquad \frac{\partial C}{\partial t} = -F'''_{y^2t} - F'''_{z^2t} \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = -F^{IV}_{y^2t^2} - F^{IV}_{z^2t^2}$$

De même si Π(t) est la courbure totale on peut écrire :

$$(3\text{-}3\text{-}3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} = F'''_{y^2t}\, F''_{z^2} + F'''_{z^2t}\, F''_{y^2} - 2F'''_{yzt}\, F''_{yz} \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial t^2} = F^{IV}_{y^2t^2} F''_{z^2} + F^{IV}_{z^2t^2} F''_{y^2} + 2F'''_{y^2t}\, F'''_{z^2t} - 2(F'''_{yzt})^2 - 2F''_{yz}\, F^{IV}_{yzt^2} \end{cases}$$

Les coefficients relatifs aux écoulements (P) sont les mêmes à condition de ne considérer que les termes contenant y et t, avec nécessairement Π(t) = 0 et

$\Omega(t) = \dfrac{1}{R(t)}$ si R(t) est le rayon de courbure en un point de la méridienne de l'obstacle.

Pour les écoulements (R) il n'y a plus qu'à considérer une seule courbure qui est celle de la méridienne de l'obstacle : $\Omega(t) = \frac{1}{R(t)}$ dont les coefficients sont alors :

$$(3\text{-}3\text{-}4) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\left[F'''_{y^2 t}\right]_{(R)} \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = -\left[F^{IV}_{y^2 t^2}\right]_{(R)}$$

Il faut alors distinguer 2 cas suivant les mouvements considérés.

Ecoulements (E) et (P) :

Si l'on se place au sommet de l'obstacle, les formules (2-7-10) et (2-7-11) se simplifient car en ce point : A = B = C = D. On obtient alors puisque U = 1 :

$$(3\text{-}3\text{-}5) \qquad F'''_{y^2 t} + F'''_{z^2 t} = \frac{2\bar{\sigma} M}{M^2+1}\left[f''^2_{y^2} + f''^2_{z^2} + 2\, f''^2_{zy}\right]$$

pour les mouvements à 3 variables et une formule analogue pour les mouvements plans.

De même la formule (2-10-3) permet de calculer au sommet l'expression :

$$(3\text{-}3\text{-}6) \qquad \begin{cases} F^{IV}_{y^2 t^2} + F^{IV}_{z^2 t^2} = 4\bar{\sigma}^2 \dfrac{M^2}{M^2+1}\left[f''_{y^2}\left(f''^2_{y^2}+f''^2_{zy}\right)+f''_{z^2}\left(f''^2_{z^2}+f''^2_{zy}\right)+ 2f''^2_{zy}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)\right]- \\ - 2.\dfrac{M^2\left[\Delta M^2-(M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]\right]}{(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta(M^2+1)^2}\,\xi''^2_{t^2}\left(f''^2_{y^2}+f''^2_{z^2}+2\,f''^2_{zy}\right)+ \\ + 2\,\bar{\sigma}^2\dfrac{\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\,\mu^2M^2+1-\mu^2\right]}{\Delta(M^2+1)^2}\left(f''_{y^2}-f''_{z^2}\right)\left(f''^2_{y^2}+f''^2_{z^2}+2f''^2_{zy}\right) \end{cases}$$

L'application de la formule (2-10-3) et de la formule (2-7-13) permet aussi de calculer les coefficients qui interviennent dans le calcul de $\Pi(t)$. On obtient ainsi :

$$(3\text{-}3\text{-}7) \qquad F'''_{y^2 t}F''_{z^2} + F'''_{z^2 t}F''_{y^2} - 2F'''_{yzt}F''_{yz} = \frac{2\bar{\sigma}M}{M^2+1}\left[f''_{y^2}f''_{z^2}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)- f''^2_{zy}\left(f''_{y^2}+f''_{z^2}\right)\right]$$

Si l'on utilise en plus la formule (2-10-4) on calcule de même :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&F^{IV}_{y^2t^2}F''_{z^2}+F^{IV}_{z^2t^2}F''_{y^2}+2F'''^2_{y^2t}F'''^2_{z^2t}-2(f'''_{yzt})^2-2F''_{yz}F^{IV}_{t^2yz}=\\
&=\frac{8\bar{o}M^2}{(M^2+1)^2}\left[(f''^2_{y^2}+f''^2_{zy})(f''^2_{z^2}+f''^2_{zy})-f''^2_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})^2\right]+\\
&+\frac{4\bar{o}^2M^2}{M^2+1}\left[f''_{y^2}f''_{z^2}(f''^2_{y^2}+f''^2_{z^2}+2f''^2_{zy})+f''^2_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})^2-2f''^2_{zy}(f''^2_{y^2}+f''^2_{z^2}+f''_{y^2}f''_{z^2}+f''^2_{zy})\right]-\\
&-2\frac{M^2\left[\Delta M^2-(M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]\right]}{(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta(M^2+1)^2}\left[f''^2_{y^2}f''_{z^2}+f''^2_{z^2}f''_{y^2}-f''^2_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})\right]\cdot\xi''_{t^2}+\\
&+2\bar{o}^2\frac{\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]}{\Delta(M^2+1)^2}\left[\begin{array}{l}(f''_{y^2}+f''_{z^2})(f''^2_{y^2}f''_{z^2}+f''_{y^2}f''^2_{z^2})-\\ -f''^2_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})^2\end{array}\right]
\end{aligned}
\right. \qquad (3-3-8)
$$

Les expressions précédentes résolvent le problème du développement de $\Omega(t)$ et $\Pi(t)$. Mais les quantités ne dépendant que de la géométrie de l'obstacle peuvent se simplifier. En effet si ω et π sont les courbures moyennes et totales au sommet de l'obstacle, on a :

$$\omega = -(f''_{y^2}+f''_{z^2}) \qquad\qquad \pi = f''_{y^2}f''_{z^2}-f''^2_{zy}$$

Dans ces conditions on peut calculer :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&f''_{y^2}f''_{z^2}(f''_{y^2}+f''_{z^2})-f''^2_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})=-\pi\omega\\
&(f''^2_{y^2}+f''^2_{zy})(f''^2_{z^2}+f''^2_{zy})-f''^2_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})^2=\pi^2\\
&f''_{y^2}f''_{z^2}(f''^2_{y^2}+f''^2_{z^2}+2f''^2_{zy})+f''^2_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})^2-2f''^2_{zy}(f''^2_{y^2}+f''^2_{z^2}+f''_{y^2}f''_{z^2}+f''^2_{zy})=\\
&=f''_{y^2}f''_{z^2}(\omega^2-2\pi)+f''^2_{zy}\omega^2-2f''^2_{zy}[\omega^2-\pi]=f''_{y^2}f''_{z^2}(\omega^2-2\pi)+f''^2_{zy}(2\pi-\omega^2)=(\omega^2-2\pi)\pi\\
&f''^2_{y^2}f''_{z^2}+f''^2_{z^2}f''_{y^2}-f''^2_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})=-\omega f''_{y^2}f''_{z^2}+\omega f''^2_{zy}=-\pi\omega\\
&(f''_{y^2}+f''_{z^2})(f''^2_{y^2}f''_{z^2}+f''_{y^2}f''^2_{z^2})-f''^2_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})^2=\omega^2\pi\\
&f''_{y^2}(f''^2_{y^2}+f''^2_{zy})+f''_{z^2}(f''^2_{z^2}+f''^2_{zy})+2f''^2_{zy}(f''_{y^2}+f''_{z^2})=f''^3_{y^2}+f''^3_{z^2}-\omega f''^2_{zy}-2\omega f''^2_{zy}=\omega(3\pi-\omega^2)\\
&f''^2_{y^2}+f''^2_{z^2}+2f''^2_{zy}=\omega^2-2\pi
\end{aligned}
\right. \qquad (3-3-9)
$$

- Par conséquent les développements au second ordre des courbures moyennes et totales au sommet des chocs ne dépendent, en dehors de M et de μ^2, que des grandeurs géométriques analogues au sommet de l'obstacle. Ils s'écrivent :

(3-3-10)
$$\left\{\begin{array}{l} \Omega(t) = \omega - \dfrac{2M}{M^2+1}\,\bar{o}t(\omega^2-2\pi) + B\,\omega(\omega^2-2\pi)(\bar{o}t)^2 + \dfrac{2M^2}{M^2+1}\,\omega(\omega^2-3\pi)(\bar{o}t)^2 \\ \qquad + A\,\xi''_{t^2}\cdot(\omega^2-2\pi)t^2 + \mathcal{O}(t^3) \\ \Pi(t) = \pi - \dfrac{2M}{M^2+1}\,\bar{o}t\,\pi\omega^2(\bar{o}t)^2 + \dfrac{4M^2}{(M^2+1)^2}\,\pi^2(\bar{o}t)^2 + \dfrac{2M^2}{M^2+1}\,\pi(\omega^2-2\pi)(\bar{o}t)^2 + \\ \qquad + A\,\xi''_{t^2}\cdot\pi\omega t^2 + \mathcal{O}(t^3) \end{array}\right.$$

dans lesquels les coefficients A et B ont pour expressions :

(3-3-11)
$$\left\{\begin{array}{l} A(M,\mu^2) = \dfrac{M^2(4M^4-M^2+1)}{(1-\mu^2)(M^2+1)^2[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]} \\ B(M,\mu^2) = \dfrac{[(1-\mu^2)M^2-\mu^2](M^2-1)[M^4(1-\mu^2)+2\mu^2M^2+1-\mu^2]}{(M^2+1)^2[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]} \end{array}\right.$$

la valeur de M au sommet étant donnée par (3-2-3).

Si $\pi \to 0$ et $\omega \to \dfrac{1}{\mathcal{R}_1}$ on obtient la formule relative aux mouvements (P), $\mathcal{R}_1$ étant le rayon de courbure au sommet de la section de l'obstacle par le plan z = 0.

Ecoulements (R) :

Il n'y a plus qu'une courbure au sommet : $\Omega(t) = \dfrac{1}{R(t)}$ où R(t) est la courbure au sommet de la méridienne du choc. Son développement s'écrit :

(3-3-12)
$$\frac{1}{R(t)} = \frac{1}{\mathcal{R}} - t[F'''_{y^2t}](R) - \frac{t^2}{2}[F^{IV}_{y^2t^2}](R) + \mathcal{O}(t^3)$$

en appelant $\mathcal{R}$ le rayon de courbure au sommet de la méridienne de l'obstacle.

Si l'on utilise la formule (2-7-10) on peut écrire immédiatement :

$$[F'''_{y^2t}](R) = \frac{2\,\bar{o}\,M}{M^2+1}\cdot\frac{1}{\mathcal{R}^2}$$

La formule (2-10-5) est déjà calculée au sommet et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[F^{IV}_{y^2t^2}](R) = \frac{\bar{\omega}^2M^2}{M^2+1}\cdot\frac{1}{R^3} + \bar{\omega}^2\,\frac{[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2-1)[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2]}{\Delta(M^2+1)^2}\cdot\frac{1}{R^3} -$$

$$- 2M^2\,\frac{\Delta M^2-(M^2-1)[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2]}{(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta(M^2+1)^2}\,\xi''_{t^2}\cdot\frac{1}{R^2}$$

Dans ces conditions le développement (3-3-12) fait apparaitre les coefficients A et B définis précédemment et permet de développer le rapport des courbures de l'obstacle et du choc en leur sommet sous la forme :

(3-3-13) $$\boxed{\frac{R}{R(t)} = 1 - \frac{2M}{M^2+1}\bar{\omega}t.\frac{1}{R} + 2B.\frac{1}{R^2}(\bar{\omega}t)^2 + \frac{2M^2}{M^2+1}\cdot\frac{1}{R^2}.(\bar{\omega}t)^2 + A\,\xi''_{t^2}.\frac{1}{R}\,t^2 + \mathcal{O}(t^3)}$$

dans lequel M est toujours déterminé par (3-2-3).

4) Développements algébriques des chocs au voisinage de leur sommet.

Les développements obtenus précédemment pour h(t) et C(t) permettent de préciser la position du choc par rapport à l'obstacle ainsi que ses courbures en son sommet, dans l'hypothèse où l'on se place au voisinage de l'instant de départ de l'obstacle placé dans le fluide au repos.

Pour préciser la forme de ce choc au voisinage de son sommet,on peut en déterminer les premiers termes de son développement taylorien.

En supposant le sommet à l'origine des coordonnées on peut écrire en écoulement (E):

(3-4-1) $$F(y\,z\,t) = f_o + t.f_1 + t^2f_2 + t^3f_3 + t^4f_4 + \theta(t^5)$$

dans lequel les coefficients f_i peuvent être calculés complètement à l'aide des dérivées de F prises au sommet et à l'instant t = 0.Parmi ces dérivées certaines sont indépendantes du nombre de variables utilisées.De plus elles s'expriment simplement à l'aide des courbures ω et π ainsi que du vecteur $\vec{N}_f$ au sommet.On le désignera,puisqu'il n'y a plus de confusion possible,par N.

On peut écrire dans ces conditions :

$$\begin{cases} f''^2_{y^2} + f''^2_{zy} = \dfrac{\partial\overline{N}}{\partial y}.\dfrac{\partial N}{\partial y} \\ f''_{y^2}f'''_{y^3} + f''_{zy}f'''_{y^2z} = \dfrac{\partial\overline{N}}{\partial y}.\dfrac{\partial^2 N}{\partial y^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} f''^2_{z^2} + f''^2_{zy} = \dfrac{\partial\overline{N}}{\partial z}.\dfrac{\partial N}{\partial z} \\ f''_{z^2}f'''_{z^3} + f''_{zy}f'''_{yz^2} = \dfrac{\partial\overline{N}}{\partial z}.\dfrac{\partial^2 N}{\partial z^2} \end{cases}$$

(3-4-2)

$$\begin{cases} f''_{z^2}f'''_{zy^2} + f''_{zy}f'''_{y^3} + 2(f''_{zy}f'''_{yz^2} + f''_{y^2}f'''_{y^2z}) = \dfrac{\partial\overline{N}}{\partial z}\dfrac{\partial^2 N}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial y}\dfrac{\partial^2 N}{\partial y\partial z} \\ f''_{y^2}f'''_{yz^2} + f''_{zy}f'''_{z^3} + 2(f''_{zy}f'''_{zy^2} + f''_{zy^2}f'''_{z^2y}) = \dfrac{\partial\overline{N}}{\partial y}.\dfrac{\partial^2 N}{\partial z^2} + 2\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial z}.\dfrac{\partial^2 N}{\partial y\partial z} \end{cases}$$

Par suite les dérivées initiales de F(y z t) au sommet dont les expressions ne dépendent pas du nombre de variables utilisées seront d'après le chapitre II :

(3-4-3)

$$\begin{cases} F'_t = \bar{o}\,M \\ F'''_{ty^2} = \dfrac{2\,\bar{o}\,M}{M^2+1}\circ\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial N}{\partial y} \\ F'''_{t^2y} = 0 \\ F^{IV}_{ty^3} = 6\,\bar{o}\,\dfrac{M^3}{M^2+1}\cdot\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial y}\circ\dfrac{\partial^2 N}{\partial y^2} \\ F^{IV}_{t^3y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F''_{ty} = 0 \qquad F''_{tz} = 0 \\ F'''_{tz^2} = \dfrac{2\,\bar{o}\,M}{M^2+1}\cdot\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial z}\circ\dfrac{\partial N}{\partial z} \\ F'''_{t^2z} = 0 \\ F^{IV}_{tz^3} = 6\,\bar{o}\,\dfrac{M^3}{M^2+1}\circ\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial^2 N}{\partial z^2} \\ F^{IV}_{t^3z} = 0 \end{cases}$$

Pour les autres dérivées on doit faire une hypothèse sur le nombre de variables utilisées :

Mouvements (E) ou (P) :

Les valeurs des dérivées restantes sont alors :

(3-3-4)

$$\begin{cases} F''_{t^2} = \dfrac{M^2(M^2-1)}{(1-\mu^2)\Delta}\,\xi''_{t^2} + \bar{o}\circ 2\,\dfrac{A_2}{\Delta}\,\omega \qquad F'''_{tyz} = -2\bar{o}\,\dfrac{M}{M^2+1}\cdot f''_{zy}\,\omega \\ F'''_{t^3} = \bar{o}\cdot 3\,\dfrac{A_3}{M(M^2+1)\Delta^2}\,\omega^2 - \dfrac{\bar{o}}{1-\mu^2}\cdot\dfrac{MB_3}{(M^2+1)\Delta^2}\,\omega\,\xi''_{t^2} + \dfrac{M^3\circ C_3}{\bar{o}(1-\mu^2)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2+1)\Delta^2}(\xi''_{t^2})^2 + \\ \qquad + \dfrac{M^2\circ\xi'''_{t^3}}{(1-\mu^2)(M^2+1)} \\ F^{IV}_{ty^2z} = \dfrac{2\bar{o}\,M}{M^2+1}\left[\dfrac{\partial N}{\partial z}\,\dfrac{\partial^2 N}{\partial y^2} + 2\,\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 N}{\partial y\,\partial z}\right] \qquad F^{IV}_{tyz^2} = \dfrac{2\bar{o}M}{M^2+1}\left[\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial y}\circ\dfrac{\partial^2 N}{\partial z^2} + 2\,\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial^2 N}{\partial y\,\partial z}\right] \\ F^{IV}_{t^2y^2} = \dfrac{4\bar{o}^2M^2}{M^2+1}\left[f''_{y^2}\,\dfrac{\partial N}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial N}{\partial y} - \omega f''_{zy}\right] - 2\,\dfrac{M^2\left[\Delta M^2-(M^2-1)[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2]\right]}{(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta(M^2+1)^2}\,\xi''_{t^2}\cdot\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial N}{\partial y} \\ \qquad - 2\bar{o}\cdot 2\,\dfrac{[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2-1)[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2]}{\Delta(M^2+1)^2}\,\omega\circ\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial N}{\partial y} \end{cases}$$

$$F^{IV}_{t^2z^2} = \frac{4\sigma^{-2}M^2}{M^2+1}\left[f''_{z^2}\frac{\overline{\partial N}}{\partial z}\cdot\frac{\partial N}{\partial z} - \omega f''^2_{zy}\right] - \frac{2M^2\left[\Delta M^2-(M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]\right]}{(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta(M^2+1)^2}\xi''_{t^2}\frac{\overline{\partial N}}{\partial z}\cdot\frac{\partial N}{\partial z}$$

$$- 2\sigma^{-2}\frac{\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]}{\Delta(M^2+1)^2}\omega\cdot\frac{\overline{\partial N}}{\partial z}\cdot\frac{\partial N}{\partial z}$$

$$F^{IV}_{t^2yz} = \frac{4\sigma^{-2}M^2}{M^2+1}f''_{zy}(\omega^2-\pi)+2\frac{M^2\left[\Delta M^2-(M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]\right]}{(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta(M^2+1)^2}f''_{zy}\omega\,\xi''_{t^2}+$$

$$+ 2\,\sigma^{-2}\frac{\left[(1+\mu^2)M^2-\mu^2\right](M^2-1)\left[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2\right]}{\Delta(M^2+1)^2}f''_{zy}\omega^2$$

$$F^{IV}_{t^4} = \frac{M^2}{(1-\mu^2)(M^2+1)}\xi^{IV}_{t^4} - \sigma^{-4}\frac{A_4}{(M^2+1)^2M^2\Delta^3}\omega^3 - \frac{M^3B_4}{\sigma(1-\mu^2)^3(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta}\xi''\xi'''_{t^3}$$

$$- \frac{\sigma M C_4}{(1-\mu^2)(M^2+1)\Delta}\omega\,\xi'''_{t^3} + \frac{1}{\sigma^2(1-\mu^2)^3}\cdot\frac{M^2D_4}{(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta^3}(\xi''_{t^2})^3 +$$

$$+ \frac{\sigma^{-2}}{1-\mu^2}\cdot\frac{E_4}{(M^2+1)^2\Delta^3}\omega^2\,\xi''_{t^2} - \frac{F_4}{(1-\mu^2)(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta^3}\omega\cdot(\xi''_{t^2})^2$$

D'autre part les coefficients f_i de (3-4-2) à l'exception de f_o ne sont déterminés que par des termes du 3ème degré au plus, en y et z. Par conséquent si f_o désigne le développement algébrique de même degré de l'équation de l'obstacle au voisinage de l'origine, (3-4-1) s'écrira avec les valeurs précédentes sous la forme :

$$F(y,z,t) = f_o + \frac{t}{6}\left[6F'_t + 3y^2F'''_{ty^2} + 3z^2F'''_{tz^2} + 6yzF'''_{tyz} + 3y^2zF^{IV}_{ty^2z} + 3yz^2F^{IV}_{tyz^2} + y^3F^{IV}_{ty^3} + z^3F^{IV}_{tz^3}\right]$$

$$+ \frac{t^2}{4}\left[2F''_{t^2} + y^2F^{IV}_{t^2y^2} + z^2F^{IV}_{t^2z^2} + 4yzF^{IV}_{t^2yz}\right] + \frac{t^3}{6}F'''_{t^3} + \frac{t^4}{24}F^{IV}_{t^4} + \sigma(t^5) \qquad (3\text{-}4\text{-}5)$$

- Au voisinage de son sommet, la surface du choc est donc représentée par cette cubique qui se déforme avec le temps à partir de l'instant initial.

En annulant dans (3-4-5) la variable z, on obtiendra le développement relatif aux mouvements (P).

Mouvements (R) :

On reprend à l'aide du chapitre II les valeurs des dérivées dont l'expression dépend de la nature du mouvement.Dans ces conditions les expressions analogues à (3-4-4) ne dépendent plus de la géométrie de l'obstacle que par la courbure $\frac{1}{\mathcal{R}}$ du sommet de la méridienne de l'obstacle.On obtient :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&F''_{t^2} = \frac{M^2(M^2-1)}{(1-\mu^2)\Delta}\,\xi''_{t^2} + 2\bar{o}^2\,\frac{A_2}{\Delta}\cdot\frac{1}{\mathcal{R}}\\
&F'''_{t^3} = [F'''_{t^3}]_{(P)} + \bar{o}^3\,\frac{G_3}{M(M^2+1)\Delta^2}\cdot\frac{1}{\mathcal{R}^2} + \frac{\bar{o}}{1-\mu^2}\,\frac{M\,I_3}{(M^2+1)\Delta^2}\cdot\xi''_{t^2}\cdot\frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{2\bar{o}^3\,A_3}{M(M^2+1)\Delta^2}\cdot\frac{1}{\mathcal{R}^2}\\
&F^{IV}_{t^2yz} = -2\,\frac{M^2\left[\Delta M^2-(M^2-1)[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2]\right]}{(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta(M^2+1)^2}\,\frac{1}{\mathcal{R}^2} -\\
&\qquad -4\bar{o}^2\,\frac{\Delta M^2(M^2+1)+[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2-1)[(1-\mu^2)M^4+2\mu^2M^2+1-\mu^2]}{\Delta(M^2+1)^2}\cdot\frac{1}{\mathcal{R}^3}\\
&F^{IV}_{t^4} = \frac{M^2}{(1-\mu^2)(M^2+1)}\,\xi^{IV}_{t^4} - 8\bar{o}^4\,\frac{A_4}{(M^2+1)^2M^2\Delta^3}\,\frac{1}{\mathcal{R}^3} - \frac{M_3\,B_4}{\bar{o}(1-\mu^2)^2(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta}\,\xi''_{t^2}\cdot\xi''_{t^3}\\
&\qquad -2\bar{o}\,\frac{M\,C_4}{(1-\mu^2)(M^2+1)^2\Delta}\cdot\xi'''_{t^3}\cdot\frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{1}{\bar{o}^2(1-\mu^2)^3}\cdot\frac{M^2\,D_4}{(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta^3}\,(\xi''_{t^2})^3 +\\
&\qquad + \frac{\bar{o}^2}{1-\mu^2}\cdot\frac{G_4}{(M^2+1)^2\Delta^3}\cdot\xi''_{t^2}\cdot\frac{1}{\mathcal{R}^2} - \frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{H_4}{(M^2+1)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)\Delta^3}\,(\xi''_{t^2})^2\cdot\frac{1}{\mathcal{R}}
\end{aligned}
\right. \qquad (3\text{-}4\text{-}6)
$$

et l'on a appelé $[F'''_{t^3}]_{(P)}$ la valeur définie à partir de (3-4-4) en prenant $\omega = \frac{1}{\mathcal{R}}$. Les valeurs des autres dérivées qu'il faut considérer s'obtiennent des formules (3-4-3) lorsqu'elles sont indépendantes de z.

Dans ces conditions,pour les mouvements (R),il existe un développement analogue à (3-4-1) qui s'écrira avec les valeurs précédentes :

$$
\boxed{F(y,t) = f_o + \frac{t}{6}[6F'_t + 3y^2F'''_{ty^2} + y^3F^{IV}_{ty^3}] + \frac{t^2}{4}[2F''_{t^2} + y^2F^{IV}_{t^2y^2}] + \frac{t^3}{6}F'''_{t^3} + \frac{t^4}{24}F^{IV}_{t^4} + \theta(t^5)} \qquad (3\text{-}4\text{-}7)
$$

- La méridienne de la surface du choc est donc représentée au voisinage du sommet par une cubique variable avec le temps.

5) Approximation globale des chocs instationnaires.

Les formules (3-4-5) ou (3-4-7) représentent en fait les premiers termes des développements de la surface variable des chocs au voisinage de la valeur zéro pour chacune des variables.

Mais dans les méthodes généralement utilisées pour l'étude des chocs attachés, on développe les fonctions inconnues par rapport à un paramètre petit, les autres variables restant quelconques. On a personnellement utilisé ce procédé pour l'étude des fonctions d'indice zéro relatives aux écoulements coniques de révolution à propos de la position du choc à la pointe d'une ogive quelconque, en écoulement stationnaire (thèse de 3ème cycle).

Ici la méthode du départ de l'obstacle permet de prendre le temps comme paramètre. Dans ces conditions à tout obstacle analytique animé d'un mouvement supersonique correspond une onde de choc analytique. Les théorèmes d'existence de Cauchy permettent d'affirmer l'existence d'un intervalle de convergence non nul pour la série correspondant à la détermination de l'équation de cette onde:

$$F(y,z,t) = \sum t^n \frac{\partial^n F}{\partial t^n} \qquad (3\text{-}5\text{-}1)$$

On a pu expliciter complètement les calculs en fonction des données initiales du problème jusqu'à la valeur n = 3 inclusivement. Pour cela on a utilisé, outre l'équation de l'obstacle, les grandeurs μ^2 et $\bar{c}$ liées au fluide considéré, ainsi que la grandeur auxiliaire M(y z) représentant le nombre de Mach normal en un point quelconque de la surface des chocs. On déduit du chapitre II son expression en fonction du nombre de Mach $\mathcal{M}$ de l'écoulement non perturbé :

$$M(y,z) = \frac{\mathcal{M}}{2(1-\mu^2)\sqrt{1+f'^2_y+f'^2_z}} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{4(1-\mu^2)^2(1+f'^2_y+f'^2_z)} + 1} \qquad (3\text{-}5\text{-}2)$$

pour les mouvements (E) et une expression identique indépendante de z pour les mouvements (P) et (R).

Écoulements (E) et (P) :

Dans ces conditions si l'on pose :

$$x = F(y,z,t) = F_o(y,z) + t\,F_1(y,z) + t^2 F_2(y,z) + t^3 F_3(y,z) + \theta(t^4) \qquad (3\text{-}5\text{-}3)$$

les coefficients résultent du second chapitre.

On appellera M la valeur (3-5-2). Leurs expressions seront les suivantes:

$$
\begin{cases}
F_0(y\,z) = f(y,z) \qquad F_1(y\,z) = \bar{o}\, M\sqrt{1+f'^2_y+f'^2_z} \\
F_2(y\,z) = \dfrac{M(M^2-1)}{2(1-\mu^2)\Delta}\,\xi''^2_t + \bar{o}^{-2}\dfrac{A_2}{2\Delta}\cdot\dfrac{2\Omega - U(f''_{y2}+f''_{z2})}{U} + \bar{o}^{-2}\dfrac{B_2}{2\Delta(M^2+1)}\cdot\dfrac{\Omega}{U} \\
F_3(y,z) = \dfrac{2}{3}\cdot\bar{o}^{-3}\cdot\dfrac{M^5}{M^2+1}\cdot\dfrac{Af'_y f''^2_{yz} + Bf'_z f''^2_{zy} - \Omega f''_{zy}}{U^2\sqrt{U}} + \dfrac{4}{3}\cdot\bar{o}^{-3}\cdot\dfrac{M^5}{(M^2+1)^3}\cdot\dfrac{A^2+B^2}{U\sqrt{U}} + \\
\quad + \dfrac{8}{3}\cdot\bar{o}^{-3}\cdot\dfrac{M^5}{(M^2+1)^3}\cdot\dfrac{f'^2_y f'^2_z (f''^2_{zy} + f''_{y^2} f''_{z^2}) - A\,B\,f'_y f'_z}{U^2\sqrt{U}} + \\
\quad + \dfrac{1}{6}\cdot\bar{o}^{-3}\cdot\dfrac{M^3}{M^2+1}\cdot\dfrac{\Omega_1 + 2(A^2+B^2) + 2f'_y f'_z\, G}{U\sqrt{U}} + \bar{o}^{-3}\dfrac{A_3}{6M(M^2+1)\Delta^2}\cdot\dfrac{[2\Omega - U(f''_{y^2}+f''_{z^2})]^2}{U^2\sqrt{U}} \\
\quad - \dfrac{\bar{o}}{6(1-\mu^2)}\dfrac{M\,B_3}{(M^2+1)\Delta^2}\cdot\dfrac{2\Omega - U(f''_{y^2}+f''_{z^2})}{U\sqrt{U}}\cdot\xi''^2_t + \\
\quad + \dfrac{M^3\cdot C_3}{6\bar{o}(1-\mu^2)^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2+1)(M^2+1)\Delta^2}\dfrac{(\xi''^2_t)^2}{\sqrt{U}} + \\
\quad + \bar{o}^{-3}\dfrac{D_3}{6M(M^2+1)^2\Delta^2}\dfrac{2\Omega - U(f''_{y^2}+f''_{z^2})}{U^2\sqrt{U}}\Omega + \dfrac{M^2}{6(1-\mu^2)(M^2+1)}\xi'''_{t^3} - \\
\quad - \bar{o}^{-3}\dfrac{E_3}{6(\mu^2M^2+1-\mu^2)M(M^2+1)^4\Delta^2}\dfrac{\Omega^2}{U^2\sqrt{U}} - \\
\quad - \dfrac{\bar{o}}{6(1-\mu^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2+1)^3\Delta^2}\cdot\dfrac{M\,F_3}{U\sqrt{U}}\cdot\dfrac{\Omega}{U\sqrt{U}}\cdot\xi''_{t^2}
\end{cases}
\tag{3-5-4}
$$

Les notations $A, B, \Omega, \Omega_1, G, U$ sont définies par (2-1-1) et les valeurs $\Delta, A_2, B_2, A_3, B_3, C_3, D_3, E_3$ et F_3 s'expriment en fonction de μ^2 et de M par les formules (2-4-6) et (2-8-6).

Si l'on suppose les résultats précédents indépendants de z, on aura les coefficients relatifs aux écoulements (P).

Ecoulements (R) :

$$F_0(y) = f(y) \qquad F_1(y) = \bar{o}\, M\sqrt{1+f'^2_y}$$

$$F_2(y) = \frac{M^2(M^2-1)}{2(1-\mu^2)\Delta}\,\xi''_{t^2} + \bar{o}^2\,\frac{A_2}{2\Delta}\cdot\frac{f''(f'^2-1)}{1+f'^2} + \bar{o}^2\,\frac{B_2}{2\Delta(M^2+1)}\cdot\frac{f'^2 f''}{1+f'^2}$$

$$- \bar{o}^2\,\frac{A_2}{2\Delta}\,\frac{f'}{y}$$

(3-5-5)

$$M = \frac{\mathcal{M}}{2(1-\mu^2)\sqrt{1+f'^2}} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{4(1-\mu^2)^2(1+f'^2)} + 1}$$

$$F_3(y) = \frac{1}{6}[F_3(y)]_{(P)} + \bar{o}^3\,\frac{G_3}{6\,M(M^2+1)\Delta^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\cdot\frac{f'^2}{y^2} +$$

$$+ \bar{o}^3\,\frac{H_3}{6M(M^2+1)^2\Delta^2}\cdot\frac{f'^3 f''}{(1+f'^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{y} - \bar{o}^3\,\frac{A_3}{3M(M^2+1)\Delta^2}\cdot\frac{f'f''(f'^2-1)}{(1+f'^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{y} -$$

$$- \frac{\bar{o}}{6(1-\mu^2)}\cdot\frac{M\,I_3}{(M^2+1)\Delta^2}\cdot\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2_y}}\cdot\frac{\xi''_{t^2}}{y}$$

On a appelé $[F_3(y)]_{(P)}$ le coefficient $F_3(y,z)$ défini par (3-5-4) lorsqu'il ne dépend pas de z. Les nouveaux coefficients G_3, H_3 et I_3 sont définis en fonction de μ^2 et de M par la formule (2-8-6).

Ces coefficients donnent le développement analogue à (3-5-3) pour la méridienne des chocs de révolution :

(3-5-6)

$$\boxed{x = F(y,t) = F_0(y) + t\,F_1(y) + t^2 F_2(y) + t^3 F_3(y) + \mathcal{O}(t^4)}$$

Il faut noter que l'hypothèse d'analyticité entraine que $\frac{f'_y}{y} \to f''_{y^2}$ si $y \to 0$ et que l'axe de révolution n'est pas une ligne singulière pour ce développement.

- Dans le cas d'un mouvement de translation constante,la formule (3-5-3) en écoulement (P) et la formule (3-5-6) permettent de comparer les chocs au voisinage du départ de l'obstacle.La figure (1) est relative à un obstacle en forme de cylindre parabolique.La figure analogue (2) est relative à un obstacle en forme paraboloïde de révolution.Les résultats précédents montrent,dans cette hypothèse, que la surface du choc en écoulement (R) est située plus près de l'obstacle qu'en écoulement (P) pour une même valeur du temps.La courbure des chocs relative aux écoulements (R) est plus importante que celle relative aux écoulements (P) dans les mêmes conditions.

6) Sur le calcul numérique des coefficients.

Afin de rester dans des limites raisonnables d'écriture,le calcul en un point quelconque du coefficient $F_4(y\,z)$ n'a pas été conduit jusqu'à son expression en fonction des données du problème.Il en a été de même des coefficients du quatrième ordre relatifs à l'expression des courbures C(t) en un point quelconque lorsqu'on désire une approximation au second ordre de ces grandeurs.
Toutefois les coefficients complets calculés dans les paragraphes précédents peuvent être le départ de calculs numériques d'où résulteront les valeurs des autres coefficients pour des données initiales choisies numériquement.
On a indiqué en (2-6-3) et (2-6-4) comment on peut théoriquement déterminer la matrice :

$$\frac{\partial^n |F'|}{\partial \vec{s}^n} = \left\| \frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n} |F'|'_t \quad ; \quad \frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n} |F'|'_y \quad ; \quad \frac{\partial^n}{\partial \vec{s}^n} |F'|'_z \right\|$$

dont les éléments sont formés par des dérivées partielles de F d'ordre n+1 à l'instant initial.La difficulté réside dans la longueur des calculs,la dérivée $F_{n+1}(y,z)$ qu'il faut obtenir résultant du calcul de toutes les autres dérivées du même ordre ou d'ordre inférieur.
Toutefois il a été possible,pour faciliter des calculs numériques,d'expliciter l'expression de $F_4(y,z)$ en fonction de coefficients dont l'expression par rapport aux conditions initiales a été effectuée complètement par ailleurs.
Au préalable il est nécessaire de connaitre en un point quelconque $F^{IV}_{t^2y^2}$ et $F^{IV}_{t^2yz}$.
On pourrait développer leur expression totalement.Mais on peut remarquer,pour rester dans des limites raisonnables d'écriture,que les équations matricielles (2-10-1) et (2-10-2) permettent d'écrire leur expression en fonction des dérivées secondes et troisièmes seulement.

A partir de (2-10-1) et en utilisant (2-9-3) et les notations (2-1-1) on peut écrire :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&F^{IV}_{t^2y^2}(y,z,o) = \frac{M^2}{(1-\mu^2)(M^2+1)}\cdot A'_x\cdot F'''_{ty^2} + \frac{\bar{c}^2M^2}{U}(Ef'_y+Ff'_z) + \frac{8\bar{c}^2M^4}{M^2+1}\cdot\frac{Af'^2_y f'''_{y^3}+Bf'^2_z f'''_{z^3}}{U^2}\\
&+6\bar{c}^2\frac{M^4}{M^2+1}\cdot\frac{f'_y f''^2_{y^2} f'''_{y^3}+f'_z f''^2_{z^2} f'''_{z^3}+f''_{yz}\,G}{U} + 24\,\bar{c}^2\frac{M^6}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{f'_y f'_z(A^2 f''^2_{z^2}+B^2 f''^2_{y^2})-f''_{zy} f'_y f'_z(A^2+B^2)}{U^3}\\
&-24\bar{c}^2\frac{M^4}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{A\,C+B\,D+Af''^2_{y^2}+Bf''^2_{z^2}+f''^2_{zy}(A+B)}{U^2} + 96\bar{c}^2\frac{M^6}{(M^2+1)^3}\cdot\frac{A^3+B^3}{U^3} +\\
&+\frac{M^2-1}{M^2+1}\cdot\frac{f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt}}{U}F'''_{ty^2} - \frac{8\bar{c}\,M^3}{M^2+1}\cdot\frac{A}{U\sqrt{U}}\cdot(f'_y F'''_{ty^2}+f'_z F'''_{tz^2}) - \frac{4}{M^2+1}\cdot\frac{A}{U}\cdot F'''_{t^2y} +\\
&+2\,\frac{M^2-1}{M^2+1}\cdot\frac{f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt}}{U}\cdot F''_{ty} + \frac{4}{\bar{c}\,M(M^2+1)}\cdot\frac{F''_{ty}}{\sqrt{U}}\cdot F'''_{t^2y} + \frac{2}{\bar{c}\,M(M^2+1)}\cdot\frac{F'''_{ty^2}\cdot F''_{t^2}}{\sqrt{U}} +\\
&+2\,\frac{M^2-1}{M^2+1}\cdot(f''_{y^2}F''_{ty}+f''_{zy}F''_{tz})\cdot\frac{F''_{ty}}{U} + 2\bar{c}\,\frac{M}{\sqrt{U}}\cdot(f''_{y^2}F'''_{ty^2}+f''_{zy}F'''_{tyz}) - \frac{4M^2}{M^2+1}\cdot(f'_y F''_{ty}+f'_z F''_{tz})\frac{A}{U^2}\cdot F''_{ty} -\\
&-\frac{2}{M^2+1}\cdot\frac{F''_{t^2}}{U} - \frac{6}{\bar{c}^2M^2(M^2+1)}\cdot\frac{(F''_{ty})^2\cdot F''_{t^2}}{U} + \frac{8}{\bar{c}\,M(M^2+1)}\cdot\frac{A}{U\sqrt{U}}\cdot F''_{t^2}\cdot F''_{ty} +\\
&+\frac{2}{\bar{c}\,M(M^2+1)}\cdot(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt})\frac{(F''_{ty})^2}{U\sqrt{U}} + \frac{4\bar{c}M^3}{M^2+1}\cdot\frac{f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt}}{U\sqrt{U}} + \frac{8\bar{c}M^3}{M^2+1}\cdot\frac{A^2}{U^2\sqrt{U}}\cdot(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt}) +\\
&\frac{8\bar{c}^3}{M^2+1}\cdot\frac{f''_{y^2}F''_{ty}+f''_{zy}F''_{tz}}{U\sqrt{U}} + \frac{2\bar{c}M^3}{M^2+1}\cdot\frac{f''^2_{y^2}+f''^2_{zy}}{U\sqrt{U}}(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt}) + \frac{\bar{c}M}{\sqrt{U}}(f''_{y^3}F'''_{yt}+f''_{zy^2}F''_{zt}) -\\
&-\frac{8\bar{c}\,M^3}{M^2+1}\cdot\frac{F''_{yt}}{U\sqrt{U}}\cdot[3f'_y f''^2_{y^2} + 2f'_z f''_{y^2}f''_{zy} + f'_y{}^2 f'''_{y^3} + f'_y f''^2_{zy} + f'_y f'_z f'''_{zy^2}] -\\
&-\frac{8\bar{c}\,M^3}{M^2+1}\cdot\frac{F''_{zt}}{U\sqrt{U}}\cdot[3f'_z f''^2_{zy} + 2f'_y f''_{y^2}f''_{zy} + f'_y f'_z f'''_{y^3} + f'_z f''^2_{y^2} + f'^2_z f'''_{zy^2}]
\end{aligned}
\right. \qquad (3\text{-}6\text{-}.)
$$

Suivant les valeurs de A_x et des dérivées secondes et troisièmes de $F(y\,z\,t)$ ainsi que suivant le nombre de variables utilisées, cette expression donnait la valeur relative aux mouvements (E) (P) et (R).

De la même façon à partir de (2-10-2) on obtient la valeur suivante relative aux trois types de mouvements possibles :

$$
\begin{aligned}
F^{IV}_{t^2yz}(y,z,o) = {} & \frac{M^2}{(1-\mu^2)(M^2+1)} A_x \circ F'''_{yzt} + \frac{2M^2}{M^2+1}\,(f'_y F''_{ty} + f'_z F''_{tz})\,\frac{F'''_{tyz}}{U} + \frac{\bar{\sigma}\,M}{\sqrt{U}}(f'_y F'''_{y^2zt} + f'_z F'''_{z^2yt}) + \\
& \frac{\bar{\sigma}\,M}{\sqrt{U}}(f''^2_y + f''^2_z)F'''_{yzt} + \frac{\bar{\sigma}\,M}{\sqrt{U}} f''_{yz}\,(F'''_{y^2t} + F'''_{z^2t}) + \frac{\bar{\sigma}\,M}{\sqrt{U}}(f'''_{y^2z} F''_{yt} + f'''_{yz^2} F''_{zt}) - \frac{2\bar{\sigma}\,M^3}{M^2+1} \circ \frac{\Omega}{U\sqrt{U}} \cdot F'''_{yzt} - \\
& - \frac{2\bar{\sigma}\,M^3}{M^2+1}\,\frac{Bf'_y F'''_{y^2t} + Af'_z F'''_{z^2t}}{U\sqrt{U}} - \frac{2}{M^2+1}(f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt})\,\frac{F'''_{tyz}}{U} + \frac{2}{\bar{\sigma}\,M(M^2+1)} \circ \frac{F''^2_t \circ F'''_{yzt}}{\sqrt{U}} + \\
& + \frac{M^2-1}{M^2+1}\,\frac{f'_y F''_{tz} F'''_{y^2t} + f'_z F''_{ty} F'''_{z^2t}}{U} + \frac{2(M^2-1)}{M^2+1}(AF'''_{t^2z} + BF'''_{t^2y}) - \frac{6}{\bar{\sigma}\,M(M^2+1)} \circ F''_{ty} \circ F''_{tz} \cdot F''^2_t - \\
& - \frac{2}{M^2+1} \circ \frac{f''_{zy}(f''^2_y + f''^2_z) + G}{U} F''^2_t + \frac{2}{\bar{\sigma}\,M(M^2+1)} \circ \frac{F''_{ty} F'''_{t^2z} + F''_{tz} \cdot F'''_{t^2y}}{\sqrt{U}} + \frac{M^2-1}{M^2+1}\,\frac{f''_{yz}}{U}[(F''_{yt})^2 + (F''_{zt})^2] + \\
& + \frac{M^2-1}{M^2+1} \cdot \frac{f''^2_y + f''^2_z}{U} \cdot F''_{yt} \cdot F''_{zt} + \frac{4}{\bar{\sigma}\,M(M^2+1)} \cdot \frac{AF''_{tz} + BF''_{ty}}{U\sqrt{U}} \cdot F''^2_t + \frac{6\bar{\sigma}\,M^3}{M^2+1} f''_{yz}(F''_{yt} + F''_{zt}) + \\
& + \frac{6\bar{\sigma}\,M^3}{M^2+1}[f''^2_y F''_{yt} + f''^2_z F''_{zt}] + \frac{2}{\bar{\sigma}\,M(M^2+1)}\,\frac{f'_y F''_{ty} + f'_z F''_{tz}}{U\sqrt{U}} F''_{ty} \cdot F''_{tz} - \frac{40\bar{\sigma}\,M^3}{M^2+1} \circ \frac{A\,B}{U^2\sqrt{U}}(f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt}) + \\
& + \frac{2\bar{\sigma}\,M^3}{M^2+1} \circ \frac{12\,A\,B(f'_y f''^2_y + f'_z f''^2_z) + 5\,G}{U\sqrt{U}} \cdot (f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt}) \cdot \\
& - \frac{8\bar{\sigma}\,M^3}{M^2+1}\,\frac{(Af''_{yz} + Bf''^2_y)F''_{yt} + (Af''^2_z + Bf''_{zy})F''_{zt}}{U\sqrt{U}} + \frac{2M^2}{M^2+1}(AF''_{tz} + BF''_{ty})(f'_y F''_{ty} + f'_z F''_{tz})
\end{aligned}
\tag{3-6-2}
$$

Dans ces conditions tous les termes de la formule (2-12-2) s'expriment en fonction des dérivées secondes et troisièmes de F qui sont connues par ailleurs. Cette formule détermine par suite pour les trois types de mouvement considérés le coefficient du quatrième ordre de l'approximation globale de la surface des chocs :

$$
\boxed{24 \cdot F_4(y,z) = F^{IV}_{t^4}(y,z,o)} \tag{3-6-3}
$$

On peut remarquer que la formule (3-6-1) et son homologue par permutation des variables y et z,ainsi que la formule (3-6-2) permettent,en utilisant le développement (3-3-1) et les expressions (3-3-2) et (3-3-3),de donner en un point quelconque de la surface du choc les développements des courbures C(t) au second ordre.

Chapitre IV

- Equations des chocs détachés stationnaires -

L'objet du chapitre est d'étendre les résultats du chapitre précédent à l'étude des chocs détachés lorsque l'écoulement du fluide est permanent.

1) Chocs détachés en écoulement stationnaire.

On sait que si un solide mobile placé dans un fluide compressible est animé d'un mouvement de translation,lorsque sa vitesse dépasse la valeur critique,l'écoulement comporte des ondes de choc.On sait qu'il existe une région de l'espace où le fluide est au repos.Cette région est limitée par une onde de choc qui,pour des vitesses faiblement supersoniques,est détachée de l'obstacle.L'étude de tels écoulements n'est pas résolue.Les méthodes utilisées sont des méthodes inverses c'est-à-dire que l'on se donne a priori l'équation de la surface des chocs.On cherche à déterminer à un ordre d'approximation fixé à l'avance les paramètres intervenant dans cette équation en écrivant que les conditions aux limites classiques sur l'obstacle et sur le choc sont remplies.L'approximation d'ordre quatre semble insuffisante et les calculs relatifs à l'ordre six sont très longs. Cette méthode a été notamment utilisée par H.Cabannes.D'autres méthodes d'approximation ont été proposées par divers auteurs tels que Dungundji,Moeckel, Shu et Hida qui ont étudié notamment en écoulement axial la forme du choc dans le voisinage de son sommet.

Une mention spéciale doit être faite à Van Dyke qui par l'utilisation des systèmes de coordonnées orthogonales a donné de nombreux renseignements numériques relatifs à l'écoulement créé par des chocs détachés relatifs à des obstacles en forme de sphères ou de paraboloïdes de révolution.En particulier,d'une manière numériquement très détaillée,il a calculé la distance des sommets du choc et de l'obstacle,la courbure des chocs en leur sommet ainsi que la pression sur l'obstacle.

Au chapitre précédent relatif aux chocs non permanents créés par le départ d'un obstacle placé dans un fluide au repos,la méthode de développement global par rapport au temps dans le voisinage du départ a permis de déterminer les premiers termes des développements de certaines grandeurs caractéristiques des écoulements avec chocs détachés.Or toute grandeur A(t) liée à un écoulement non permanent dépend de la forme de l'obstacle et de son mouvement.Si les hypothèses d'analyticité que l'on a déjà signalées sont toujours remplies,elle admet

par rapport au temps un développement entier de la forme :

$$A(t,x,y,z) = \sum_{0}^{\infty} a_n(x,y,z)t^n \qquad (4\text{-}1\text{-}1)$$

dans lequel les coefficients $a_n(x,y,z)$ dépendent de f_o, ξ_o et leurs dérivées ainsi que de M_o, l'indice zéro indiquant que les grandeurs correspondantes sont prises à l'instant initial.

D'autre part si le mouvement de l'obstacle tend à devenir uniforme, il est naturel d'admettre que le mouvement du fluide par rapport à l'obstacle tend à devenir stationnaire. Par conséquent si l'on suppose que $\xi''(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, les grandeurs correspondantes étudiées dans les cas non permanents deviendront les grandeurs analogues relatives aux écoulements stationnaires. Il est encore naturel d'admettre que l'établissement du mouvement stationnaire sera d'autant plus rapide que l'obstacle atteindra plus vite sa vitesse finale. Cette vitesse finale est atteinte instantanément lorsque le mouvement de l'obstacle est uniforme : on supposera qu'il en est bien ainsi. Dans ces conditions on est amené à étudier le comportement de développements tels que (4-1-1) pour de grandes valeurs du temps sachant que l'on connait les coefficients $a_i(x,y,z)$ jusqu'à l'ordre quatre inclusivement.

2) <u>Méthode des séries tronquées de Padé-Shanks</u>.

Comme il a été indiqué au premier chapitre, cette méthode permet d'accélérer la convergence des séries. D'après les calculs du second chapitre et les développements obtenus au troisième chapitre on doit chercher à appliquer la méthode à des développements de la forme :

$$A_4(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \mathcal{O}(t^5) \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

représentant la somme partielle d'une série représentant la fonction inconnue A. D'après (1-4-8) la transformation $e_k(A_n)$ fait intervenir a_{n+k}. D'autre part $k \leq n$. On a donc nécessairement $n+k \leq 4$. Cela entraine que les seules transformations possibles de Shanks sont : $e_1(A_1)$, $e_1(A_2)$ et $e_1(A_3)$ pour le premier ordre. Pour le second ordre on peut effectuer $e_2(A_2)$. Enfin parmi les transformations itérées on ne peut effectuer que $e_1[e_1(A_2)]$. D'après (1-4-8) on obtiendra :

Premier ordre :

$$(4\text{-}2\text{-}2)\qquad \begin{cases} e_1(A_1) = \dfrac{-a_o a_1 + t(a_o a_2 - a_1^2)}{-a_1 + t\,a_2} \\ \\ e_1(A_2) = \dfrac{-a_o a_2 + t(a_o a_3 - a_2 a_1) + t^2(a_1 a_3 - a_2^2)}{-a_2 + t a_3} \\ \\ e_1(A_3) = \dfrac{-a_o a_3 + t(a_o a_4 - a_1 a_3) + t^2(a_1 a_4 - a_3 a_2) + t^3(a_2 a_4 - a_3^2)}{-a_3 + t a_4} \end{cases}$$

Second ordre :

$$(4\text{-}2\text{-}3)\quad e_2(A_2) = \frac{a_o(a_1 a_3 - a_2^2) + t[(a_1 a_3 - a_2^2)a_1 - a_o(a_1 a_4 - a_2 a_3)] + t^2[a_2(a_1 a_3 - a_2^2) - a_1(a_1 a_4 - a_2 a_3) - a_o a_3^2]}{(a_1 a_3 - a_2^2) - t(a_1 a_4 - a_2 a_3) + t^2(a_2 a_4 - a_3^2)}$$

La transformation itérée de e_1 s'écrira :

$$(4\text{-}2\text{-}4)\qquad e_1[e_1(A_2)] = \frac{e_1(A_1)[e_1(A_2) + e_1(A_3)] - [e_1(A_2)]^2 - 2e_1(A_1).e_1(A_2)}{e_1(A_3) - e_1(A_2)}$$

Ces transformations de Shanks sont applicables à une classe assez générale de suite de nombres A_n. Ici il s'agit seulement de sommes partielles d'une série représentant une fonction analytique inconnue. Les transformations diagonales $e_1(A_1)$ et $e_2(A_2)$ ne diffèrent pas alors des tables de Padé. Cet auteur a représenté une classe de fonctions analytiques sous forme de quotient de polynomes : $\dfrac{P_{k,n}(t)}{Q_{k,n}(t)}$ avec degré $P \leq n$ et degré $Q \leq k$. Le principal intérêt de ces représentations est que dans tout domaine de régularité de la fonction et ne présentant pas de pôles, la convergence vers celle-ci pour $n \to \infty$ est uniforme. Dans le problème du départ de l'obstacle qui nous intéresse, les conditions imposées restreignent l'arbitraire du choix de la transformation à utiliser parmi les 5 transformations précédentes. Il est d'abord nécessaire que la fonction inconnue A existe pour $t \to \infty$
On ne peut donc choisir que $e_1(A_1)$, $e_2(A_2)$ et $e_1[e_1(A_2)]$ qui restent bornées pour $t \to +\infty$. La transformation du premier ordre est donc une transformation de Padé et les conditions de convergence comme il a été dit pourront être remplies. On aura donc au premier ordre d'approximation :

$$(4\text{-}2\text{-}5)\qquad \lim_{t \to \infty} A(t) = A = \lim_{t \to \infty} e_1(A_1) = \frac{a_o a_2 - a_1^2}{a_2}$$

Dans les transformations au second ordre faisant intervenir les coefficients a_3 et a_4 il y a a priori deux possibilités : $e_2(A_2)$ de Padé ou $e_1[e_1(A_2)]$ de Shanks. Mais l'on verra au chapitre (5) que les calculs déterminant les dérivées de la fonction $F(y,z,t)$ demeurent valables si l'obstacle convexe analytique se réduit à un cône de révolution, non analytique par la présence du sommet. Pour celui-ci on obtient $a_2 \neq 0$ et $a_3 = a_4 = 0$. Il est alors impossible d'utiliser la transformation diagonale $e_2(A_2)$ de Padé comme il résulte de (4-2-3).
La transformation au second ordre définissant la fonction A s'obtiendra alors en effectuant $e_1[e_1(A_2)]$ et s'écrira :

$$A = \lim_{t \to \infty} e_1[e_1(A_2)] = \frac{a_o a_2 - a_1^2}{a_2} - \frac{(a_1 a_3 - a_2^2)^2}{a_2 a_4 - a_3^2} \cdot \frac{a_4}{a_3^2} \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

L'arbitraire du choix des transformations à effectuer est donc levé dans le problème qui nous intéresse. De plus les propriétés des fonctions A caractérisant les écoulements stationnaires sont généralement peu connues. Il nous a paru plus profitable d'utiliser parmi les méthodes des séries tronquées, celles qui sont applicables à la classe la plus large de fonctions.

3) Distance des sommets parallèlement à la vitesse.

Dans l'hypothèse d'un mouvement quelconque de l'obstacle il a été établi en (3-2-4) que la distance $h(t)$ des sommets dans le voisinage du départ était, en se limitant aux termes du second ordre :

$$h(t) = \bar{c}\, M.t - \xi_t'(0).t + h_2 t^2 + (t^3) \qquad (4\text{-}3\text{-}1)$$

le coefficient h_2 étant défini par (3-2-5). Ce dernier ne dépend que de μ^2, de la courbure au sommet de l'obstacle ω, de l'accélération initiale de celui-ci et de la valeur initiale M du nombre de Mach normal au sommet.
De par sa définition la fonction $h(t)$ ne peut dépendre que de μ^2, de M, de la géométrie de l'obstacle au sommet et des valeurs initiales $\xi_{t^n}^{(n)}(0)$. Pour des raisons physiques il est logique d'admettre que l'analyticité de $h(t)$ a lieu quel que soit t. Par conséquent les représentations $[k,n]$ de Padé de cette fonction convergeront vers $h(t)$ quel que soit t. Le développement (4-3-1) permet d'écrire la représentation $[1,1]$ qui s'écrit :

(4-3-2) $$h(t) = \frac{[\overline{o}\,M - \xi_t'(0)]}{1 - \frac{h_2}{\overline{o}M - \xi_t'(0)}}\, t$$

Dans ces conditions soit h la distance des sommets de l'obtacle et du choc résultant du mouvement final de l'obstacle en supposant qu'au départ le mouvement de celui-ci est uniforme. Alors pour $t \to +\infty$ $h(t) \to h$ et les formules (3-2-5) permettent d'écrire :

(4-3-3) $$h(t) \to -\frac{2\,\Delta[\overline{o}\,M - \xi_t'(0)]^2}{\overline{o}^2 . A_2 . \omega}$$

D'après (2-2-3) et (2-2-4) si l'on se place au sommet de l'obstacle on peut calculer :

(4-3-4) $$\overline{o}\,M - \xi_t'(0) = \frac{\overline{o}}{M}(\mu^2 M^2 + 1 - \mu^2)$$

D'autre part si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux au sommet de l'obstacle on aura :

$$\omega = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Dans ces conditions l'approximation du premier ordre de Padé pour la quantité h s'écrira dans le cas des mouvements (E) :

(4-3-5) $$\boxed{h_1\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right](E) = \frac{2(\mu^2 M^2 + 1 - \mu^2)[(3\mu^2 + 1)M^4 - (2\mu^2 - 3)M^2 - \mu^2]}{[(1+\mu^2)M^2 - \mu^2](M^2 - 1)M^2}}$$

Dans le cas des écoulements plans si R_1 est le rayon de courbure au sommet de la section de l'obstacle par le plan $z = 0$, on aura la formule analogue suivante :

(4-3-6) $$\left[\frac{h_1}{R_1}\right](P) = \frac{2(\mu^2 M^2 + 1 - \mu^2)[(3\mu^2 + 1)M^4 - (2\mu^2 - 3)M^2 - \mu^2]}{[(1+\mu^2)M^2 - \mu^2](M^2 - 1)M^2}$$

Si l'on considère maintenant des écoulements présentant la symétrie de révolution, la comparaison des expressions (3-2-6) et (3-2-10) montre que si R est le rayon de courbure au sommet d'une méridienne de l'obstacle, la formule analogue à (4-3-6) s'écrira :

$$\left[\frac{h_1}{R}\right](R) = \frac{(\mu^2M^2+1-\mu^2)[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]}{[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2-1)M^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{h_1}{R_1}\right](P) \qquad (4\text{-}3\text{-}7)$$

On notera par suite que la distance des sommets possède une limite pour les grandes valeurs du nombre de Mach amont $\mathcal{M}$.

Parmi les résultats expérimentaux ou numériques relatifs à ces questions, il a surtout été traité le cas des écoulements présentant la symétrie de révolution. On peut en particulier comparer la formule (4-3-7) aux résultats numériques particulièrement nombreux obtenus par M.D.Van Dyke et H.D.Gordon et relatifs à des sphères ou paraboloïdes de révolution. Si l'on considère la valeur $\gamma = 7/5$ et le cas d'une sphère on aura ainsi :

$\mathcal{M}$	Valeurs de $\left[h_1/R\right]$	
2	0,340	0,513
3	0,213	0,347
4	0,174	0,288
10	0,135	0,213
	Numérique	Formule (4-3-7)

Il faut noter d'après les hypothèses relatives au départ d'un obstacle dans un fluide au repos que les approximations fractionnaires obtenues pour la distance h seront d'autant meilleures que le nombre de Mach $\mathcal{M}$ de l'écoulement amont, donc le nombre de Mach normal M, seront importants. Il est clair en effet que le choc et l'obstacle seront d'autant plus voisins au départ que la vitesse initiale de ce dernier sera grande.

Afin de préciser l'expression de h, il est utile d'utiliser la transformation itérée de Shanks $e_1[e_1(A_2)]$ à la fonction h(t) comme on l'a indiqué au paragraphe précédent.

Dans l'hypothèse d'un mouvement uniforme de l'obstacle le développement obtenu pour h(t) est de la forme :

4-3-8) $$h(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \mathcal{O}(t^5)$$

les coefficients indépendants du nombre de variables utilisées étant définis par les expressions (3-2-7). Il est alors possible d'après les formules (3-2-6) et (3-2-9) de déterminer dans tous les cas les expressions des coefficients des puissances de t. On peut ainsi dresser le tableau suivant :

Coeff.	Mouvements (E) ou (P)	Mouvements (R)
a_o	0	0
a_1	$\frac{\bar{o}}{M}(\mu^2 M^2 + 1 - \mu^2)$	$\frac{\bar{o}}{M}(\mu^2 M^2 + 1 - \mu^2)$
a_2	$- C\ \omega . \bar{o}^2$	$-\frac{2C}{R}\bar{o}^2$
a_3	$D\ \omega . \bar{o}^3$	$\frac{4D}{R^2}.\bar{o}^3$
a_4	$-E\ \omega^3 . \bar{o}^4$	$-\frac{8E}{R^3}.\bar{o}^4$

L'approximation du premier ordre de Padé a permis d'obtenir dans chaque cas la valeur h_1 de h. Si l'on utilise alors la transformation itérée de Shanks définie par (4-2-6) on s'aperçoit que l'on peut écrire :

4-3-9) $$e_1[e_1(H_2)] \to h_1\omega + h_2\omega$$

Par conséquent la correction à apporter à la transformation de Padé est définie par les formules suivantes :

4-3-10)
$$\begin{cases} \left[h_2 \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}\right](E) = \dfrac{[(\mu^2 M^2 + 1 - \mu^2).D - M.C^2]^2 .E}{M^2 D^2 (C\,E - D^2)} \\ \\ \left[\frac{h_2}{R}\right](R) = \frac{1}{8}\dfrac{[(\mu^2 M^2 + 1 - \mu^2).D - M\,C^2]^2 .E}{M^2 D^2 (C\,E - D^2)} = \frac{1}{8}\left[\frac{h_2}{R_1}\right]_P \end{cases}$$

suivant que l'on considère des mouvements quelconques ou des mouvements présentant la symétrie de révolution.

Si l'on utilise maintenant les expressions (3-2-7) des coefficients C,D,E par rapport aux données initiales on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} \left[h_2\,\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right](E) = \dfrac{3(\mu^2M^2+1-\mu^2)[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2].[-M^4+(4\mu^2-1)M^2+4(1-\mu^2)]^2.(K)}{2M^2(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2][M^4+(2\mu^2+1)M^2+2(1-\mu^2)]^2.(G)} \\ \left[\dfrac{h_2}{R}\right](R) = \dfrac{1}{8}\left[\dfrac{h_2}{R_1}\right](P) \end{array}\right. \qquad (4\text{-}3\text{-}11)$$

où l'on a posé les nouveaux coefficients :

$$\left\{\begin{array}{l} (K) = M^8+M^6(-6\mu^4+8\mu^2+2)+M^4(18\mu^4-12\mu^2+9)+M^2(-18\mu^4+16\mu^2+2)+6(1-\mu^2)^2 \\ (G) = -M^8+M^6(-18\mu^4+8\mu^2-2)+M^4(38\mu^4-36\mu^2+7)+M^2(-22\mu^4+17\mu^2-10)+2\mu^4-4\mu^2+2 \end{array}\right. \qquad (4\text{-}3\text{-}12)$$

Par conséquent dans les hypothèses du départ d'un obstacle dans un fluide au repos, dans l'écoulement stationnaire final obtenu, les valeurs approchées de la distance h des sommets de l'obstacle et du choc détaché sont définies par les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecoulements (E) ou (P)} : [h]_{(E)} = [h_1]_{(E)} + [h_2]_{(E)} \\ \text{Ecoulements (R)} : [h]_{(R)} = \dfrac{[h_1]_P}{2} + \dfrac{[h_2]_P}{8} \end{array}\right. \qquad (4\text{-}3\text{-}13)$$

où les coefficients h_i définis par (4-3-5) et (4-3-11) ne dépendent que de μ^2, M et de la courbure au sommet de l'obstacle.

Elles montrent en particulier que h a une limite finie non nulle pour $M \to \infty$.

A l'approximation du 1er ordre de Padé on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to\infty}[h]_{(E)} = \dfrac{2\mu^2(3\mu^2+1)}{1+\mu^2} \\ \lim\limits_{t\to\infty}[h]_{(R)} = \dfrac{\mu^2(3\mu^2+1)}{1+\mu^2} \end{array}\right. \qquad (4\text{-}3\text{-}14)$$

En prenant pour critère de comparaison les résultats numériques obtenus par M.Van Dyke et H.Gordon dans le cas des écoulements de révolution et d'un obstacle sphérique on peut dresser le tableau suivant correspondant à $\gamma = 1$, $\gamma = 7/5$ et $\gamma = 5/3$ respectivement :

Valeurs de $\frac{[h]_R}{R}$

$\mathcal{M}$	$\mu^2 = 0$		$\mu^2 = 0,166$		$\mu^2 = 0,250$	
	Num.	(4-3-13)	Num.	(4-3-13)	Num.	(4-3-13)
1,5	0,449	0,482	0,574	0,625	0,648	0,704
2	0,218	0,254	0,340	0,422	0,411	0,518
3	0,0904	0,104	0,213	0,281	0,282	0,387
4	0,0508	0,0558	0,174	0,233	0,242	0,342
6	0,0232	0,0236	0,148	0,200	0,216	0,309
10	0,00816	0,00828	0,135	0,182	0,203	0,293
12	"	0,00571	"	0,179	"	0,290
30	"	0,00090	"	0,174	"	0,285
10^4	"	"	0,128	0,174	0,195	0,285

Les résultats sont d'autant meilleurs que l'indice adiabatique γ est voisin de 1 et que $\mathcal{M}$, donc M est grand. Il serait donc utile de reprendre par ce procédé le calcul de la distance h dans les hypothèses des écoulements hypersoniques. Mais l'on doit regretter que les approximations des premiers et second ordre ne dépendent au sommet que de la courbure de l'obstacle en ce point. Dans le cas des approximations globales en un point quelconque de la surface du choc, on verra que la première approximation dépend des éléments géométriques d'ordre deux de l'obstacle qui ne se réduisent pas à la seule courbure. La figure (3) relative aux écoulements de révolution permet de comparer la première approximation $\frac{[h_1]_P}{2R}$ et la seconde résultant du tableau précédent : $\frac{[h_1]_P}{2R} + \frac{[h_2]_P}{8R}$ pour un obstacle sphérique.

La figure (4) est la figure analogue relative à un mouvement plan et illustre la première formule (4-3-13). Il serait utile dans ce cas de la comparer avec des résultats obtenus numériquement.

4) <u>Courbures au sommet des chocs</u>.

La seule différence avec le calcul de h réside dans le fait que les expressions (3-3-10) des courbures $\Omega(t)$ et $\pi(t)$ ainsi que (3-3-13) de $\frac{R}{R(t)}$ ne sont définies que par des développements au second ordre par rapport à t . Par conséquent on ne peut appliquer à ces expressions que la transformation uniforme de Padé définie par (4-2-5).

Dans ces conditions les expressions approchées des courbures Ω et Π au sommet des chocs stationnaires détachés résultent de (3-3-10).On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{\Omega}{\omega}\right](E)=1-\dfrac{4M^2[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]}{(S).\omega^4-2(T).\pi.\omega^2}(\omega^2-2\pi)^2\\[2ex]\left[\dfrac{\Pi}{\pi}\right](E)=1-\dfrac{4M^2[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2].\omega^2}{(S).\omega^2-4M^2[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2].\pi}\end{array}\right. \qquad (4\text{-}4\text{-}1)$$

avec les nouveaux coefficients :

$$\left\{\begin{array}{l}(S)=M^8(-\mu^4+6\mu^2+3)+M^6(4\mu^4+3\mu^2+7)+M^4(-6\mu^4-7\mu^2+7)+M^2(4\mu^4-3\mu^2-1)-\mu^4+\mu^2\\[2ex](T)=M^8(-\mu^4+9\mu^2+4)+M^6(4\mu^4+4\mu^2+11)+M^4(-6\mu^4-10\mu^2+10)+M^2(4\mu^4-4\mu^2-1)-\mu^4+\mu^2\end{array}\right. \qquad (4\text{-}4\text{-}2)$$

Par suite,à l'approximation considérée,les courbures au sommet des chocs détachés tendent vers les courbures au sommet de l'obstacle lorsque le nombre de Mach amont M grandit indéfiniment.

On en déduit immédiatement la formule analogue relative aux mouvements plans.Pour ceux-ci on pose en effet : $\omega=\dfrac{1}{R_1}$ et $\Omega=\dfrac{1}{R_1}$,R_1 et R_1 ayant une signification connue.

Or si $\Pi\to 0$,des formules (4-4-1) résulte que :

$$\frac{\Omega}{\omega}\to\frac{R_1}{R_1}=1-\frac{4M^2\Delta}{(S)} \quad\text{et}\quad \frac{\Pi}{\pi}\to 1-\frac{4M^2\Delta}{(S)}$$

Par conséquent nécessairement $\Pi\to 0$ et la seconde formule (4-4-1) se trouve vérifiée.La première conduit à l'équation :

$$\left\{\frac{R_1}{R_1}\right\}(P)=1-\frac{4M^2[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]}{(S)} \qquad (4\text{-}4\text{-}3)$$

fournissant la valeur cherchée relative aux mouvements plans.

La transformation uniforme de Padé appliquée à (3-3-13) détermine dans le cas des écoulements de révolution l'approximation suivante,R étant la rayon de courbure de la méridienne du choc en son sommet :

$$(4\text{-}4\text{-}4)\quad \frac{R}{R}(R) = 1 - \frac{2M^2[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]}{[M^8(-\mu^4+3\mu^2+2)+M^6(4\mu^4+2\mu^2+3)+M^4(-6\mu^4-4\mu^2+4)+M^2(4\mu^4-2\mu^2-1)+\mu^2(1-\mu^2)]}$$

La comparaison de cette formule avec les résultats des auteurs déjà cités montre que (4-4-4) est une approximation moins bonne que celle déterminant la distance h des sommets. Cette comparaison résulte en effet du tableau suivant :

Valeurs de $\left[\frac{R}{R}\right]_{(R)}$

M	$\mu^2 = 0$		$\mu^2 = 0,166$		$\mu^2 = 0,250$	
	Num.	(4-4-4)	Num.	(4-4-4)	Num.	(4-4-4)
1,5	0,386	0,706	0,350	0,754	0,332	0,780
2	0,573	0,802	0,500	0,837	0,467	0,856
3	0,764	0,898	0,634	0,916	0,584	0,927
4	0,854	0,940	0,6895	0,950	0,631	0,957
6	0,931	0,972	0,732	0,977	0,666	0,980
10	0,976	0,990	0,7535	0,991	0,684	0,992
12	"	0,993	"	0,994	"	0,994
30	"	0,998	"	0,999	"	0,999
10^4	"	1,000	0,7662	1,000	0,695	1,000

Les conclusions relatives au calcul approché de h demeurent donc valables en ce qui concerne les courbures au sommet des chocs détachés stationnaires. On peut penser toutefois que des approximations plus fines par le calcul des coefficients du 6ème ordre permettraient de vérifier que le rapport des courbures au sommet tend, comme pour la distance des sommets, vers une limite différente de l'unité. On a illustré le tableau précédent par la figure (5) pour des gaz diatomiques.

5) Approximation globale des chocs détachés

Dans le cas d'un mouvement uniforme, l'équation de l'obstacle s'écrit : $x = f(y,z) + t.\xi_t'(0)$ par rapport aux axes fixes. Si l'on se place alors par rapport à des axes liés à l'obstacle, les développements globaux (3-5-3) et (3-5-6) de la surface des chocs instationnaires dans le voisinage du départ s'écrivent :

(4-5-1) $$F(y\ z\ t) = F_o(y\ z) + t[F_1(y,z) - \xi_t'(0)] + t^2 F_2(y\ z) + t^3 F_3(y\ z) + \mathcal{O}(t^4)$$

pour les mouvements à trois variables et un développement analogue pour les mouvements de révolution. Les coefficients F_i sont déterminés respectivement par (3-5-4) et (3-5-5) dans l'hypothèse où : $\xi''_{t^2}(0) = \xi'''_{t^3}(0) = 0$.

Lorsque les conditions d'analyticité de l'obstacle sont partout remplies, les calculs effectués pour l'obtention des coefficients F_i supposent nécessairement qu'il en est de même de la fonction $F(y,z,t)$. La série dont les premiers termes sont définis par (4-5-1) parait donc susceptible de transformations rationnelles du type de Padé ou du type de Shanks. Il est plus séduisant de choisir les transformations du type de Shanks qui s'appliquent à une classe plus large de fonctions. La connaissance des seuls coefficients F_i pour $i \leq 3$ lorsqu'on se place en un point quelconque de l'obstacle ne permet toutefois que d'utiliser la transformation [1,1]. Celle-ci se confond alors, comme on l'a dit, avec celle de Padé.

On peut donc en utilisant (3-5-4) d'une part et (2-2-3) d'autre part calculer :

(4-5-2) $$F_1(y,z) - \xi_t'(0) = \frac{\overline{\sigma}}{M}\left[\mu^2 M^2 + (1-\mu^2)U\right]$$

en appelant M le nombre de Mach normal au point (x y z) défini à partir de (2-2-3) et (2-3-4) c'est-à-dire :

(4-5-3) $$M = M(y,z) = \frac{\mathcal{H}}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}} + \sqrt{\left\{\frac{\mathcal{H}}{2(1-\mu^2)\sqrt{U}}\right\}^2 + 1}$$

De même les formules (3-5-4) fournissent la valeur :

(4-5-4) $$F_2(y,z) = \frac{\overline{\sigma}^2}{2\Delta}\frac{A_2}{} \cdot \frac{2\,\Omega - U(f''_{y^2} + f''_{z^2})}{U} + \frac{\overline{\sigma}^2 B_2}{2\Delta.(M^2+1)} \cdot \frac{\Omega}{U}$$

pour les mouvements à 3 variables et

$$F_2(y) = \bar{\sigma}^2 \frac{A_2}{2\Delta} \cdot \frac{f''(f'^2-1)}{1+f'^2} + \bar{\sigma}^2 \frac{B_2}{2\Delta(M^2+1)} \cdot \frac{f'^2 f''}{1+f'^2} - \bar{\sigma}^2 \frac{A_2}{2\Delta} \cdot \frac{f'}{y} \qquad (4\text{-}5\text{-}5)$$

pour les écoulements de révolution.

Dans ces conditions l'application de la transformation [1,1] définie par (4-2-5) aux développements du type (4-5-1) conduit aux formules approchées suivantes représentant globalement les surfaces des chocs détachés stationnaires :

Mouvements (E) :

$$\lim_{t\to\infty} F(y,z,t) = F(y,z)_{(E)} = f(y,z) - \frac{2(M^2+1)\Delta}{M^2} \cdot \frac{[\mu^2M^2+(1-\mu^2)U]^2 . U}{(M^2+1)A_2[2\Omega - U(f''^2_y + f''^2_z)] + B_2 U} \qquad (4\text{-}5\text{-}6)$$

Mouvements (P) :

$$\lim_{t\to\infty} F(y,t) = F(y)_{(P)} = f(y) - \frac{2(M^2+1)\Delta}{M^2} \cdot \frac{[\mu^2M^2+(1-\mu^2)(1+f'^2)]^2 . (1+f'^2)}{(M^2+1)A_2 f''(f'^2-1) + B_2 f'^2 f''} \qquad (4\text{-}5\text{-}7)$$

Mouvements (R) :

$$\lim_{t\to\infty} F(y,t) = F(y)_{(R)} = f(y) - \frac{2(M^2+1)\Delta}{M^2} \cdot \frac{[\mu^2M^2+(1-\mu^2)(1+f'^2)]^2 . (1+f'^2)}{(M^2+1)A_2 f''(f'^2-1) + B_2 f'^2 f'' - (M^2+1)A_2 \frac{1+f'^2}{y} f'} \qquad (4\text{-}5\text{-}8)$$

On rappelle que :

$$\Omega = f'^2_y f''^2_y + f'^2_z f''^2_z + 2 f'_y f'_z f''_{zy} \quad \text{et}$$

$$U = 1 + f'^2_y + f'^2_z$$

Les coefficients A_2, B_2 et Δ sont des polynomes de degré inférieur ou égal à 6 par rapport à M(y,z) dont les coefficients ne dépendent que de μ^2 : ils sont définis par les formules (2-4-6). On notera que, loin de l'axe de révolution, l'approximation (4-5-8) redonne (4-5-7). La complexité de ces formules résulte des expressions polynomiales de A_2, B_2 et Δ en fonction de M et de la valeur de M par rapport aux données du problème qui sont μ^2 et $\mathcal{M}$. On a pu cependant en tirer profit dans un cas particulier qui fait l'objet du cinquième chapitre.

Dans l'hypothèse d'un écoulement newtonien les approximations précédentes ne sont plus approchées mais rigoureuses comme on peut le vérifier pour les valeurs $\mu^2 = 0$ et

$\mathcal{M}: \infty$. On retrouve le résultat classique que, hors du sillage, l'obstacle et le choc sont alors confondus.

Dans l'hypothèse où $\mathcal{M}$ est infiniment grand on peut donner des formules précédentes les développements suivants :

$$F(y) = f(y) - \frac{2\mu^2(3\mu^2+1)(1+f'^2)}{(1+\mu^2)\,f'' - 2f'^2 f'' + n(1+\mu^2)(1+f'^2)\,\frac{f'}{y}} + O\left[\frac{1}{\mathcal{M}^2}\right] \tag{4-5-9}$$

en se limitant aux écoulements (P) (n=0) et aux écoulements (R) (n=1). Les termes non écrits contiennent des dérivées d'ordre au moins égal à trois. Par conséquent pour un obstacle dont la méridienne est une parabole d'équation $x = -y^2$, l'équation du choc détaché que l'on peut lui associer à grande vitesse sera :

$$x = -y^2 - \frac{\mu^2(3\mu^2+1)(1+4y^2)}{2(1+\mu^2)-4(1-\mu^2)y^2} \tag{4-5-10}$$

La figure (6) est relative aux 3 valeurs suivantes : $\mu^2 = 0$, $\mu^2 = 1/6$; $\mu^2 = 1/4$ et résulte du tableau suivant :

y	Valeurs de x	
	$\mu^2 = 0,166$	$\mu^2 = 0,250$
0,02	0,1069	0,1749
0,04	0,1064	0,1748
0,06	0,1056	0,1746
0,08	0,1044	0,1744
0,10	0,1030	0,1742
0,12	0,1012	0,1739
0,14	0,0992	0,1736
0,16	0,0969	0,1734
0,18	0,0945	0,1732
0,20	0,0918	0,1732

Pour un obstacle sphérique l'approximation serait moins bonne et la considération des termes d'ordre supérieur est nécessaire.

Chapitre V

- Chocs stationnaires attachés à la pointe d'un cône -

L'objet du chapitre est d'étendre certains des résultats précédents relatifs aux chocs stationnaires détachés au cas où l'obstacle est un cône, dans l'hypothèse où un choc stationnaire est attaché à son sommet.

1) Seconde approximation relative aux cônes de révolution (cas R)

La méthode des séries tronquées a permis d'établir les équations approchées des surfaces des chocs détachés stationnaires. Les transformations considérées ont permis de déterminer les équations suivantes :

$$F(y,z) = f(y,z) - \frac{2(M^2+1)\Delta}{M^2} \cdot \frac{[\mu^2M^2+(1-\mu^2)U]^2 \cdot U}{(M^2+1)A_2[2\Omega - U(f''^2_y + f''^2_z)] + B_2[\Omega]} \tag{5-1-1}$$

pour des écoulements à trois variables et :

$$F(y) = f(y) - \frac{2(M^2+1)\Delta}{M^2} \cdot \frac{[\mu^2M^2+(1-\mu^2)(1+f'^2)]^2 \cdot (1+f'^2)}{(M^2+1)A_2f''(f'^2-1)+B_2f'^2f''-(M^2+1)A_2 \cdot \frac{1+f'^2}{y} \cdot f'} \tag{5-1-2}$$

pour des écoulements de révolution.

On sait que le nombre de Mach normal M a pour expression en fonction du nombre de Mach de l'écoulement amont :

$$M = \frac{\mathcal{M}}{2(1-\mu^2)\sqrt{U}} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{4(1-\mu^2)U} + 1} \tag{5-1-3}$$

D'autre part U et Ω ne dépendent que de la géométrie de l'obstacle et A_2, B_2 et Δ que de M et de μ^2.

L'application de ces formules reste valable tant que l'équation de la surface de l'obstacle reste analytique.

Considérons alors pour obstacle une nappe d'hyperboloïde de révolution dont la méridienne principale a pour équation :

$$x = f(y) = -\sqrt{y^2 \operatorname{otg} \theta_s + a^2}$$

$2\theta_s$ désignant l'angle au sommet du cône asymptote et a une longueur. Dans ces conditions l'expression de M(y,a) s'écrit :

(5-1-4) $$M(y,a) = \frac{\mathcal{M}\sin\theta_s\sqrt{y^2\operatorname{otg}^2\theta_s + a^2}}{2(1-\mu^2)\sqrt{y^2\operatorname{otg}\theta_s + a^2\sin^2\theta_s}} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2.\sin^2\theta_s(y^2\operatorname{otg}^2\theta_s + a^2)}{4(1-\mu^2)^2(y^2\operatorname{otg}^2\theta_s + a^2\sin^2\theta_s)} + 1}$$

Dans ces conditions (5-1-2) conduit pour la méridienne de la surface du choc à l'équation approchée suivante :

(5-1-5) $$F(y,a) = -\sqrt{y^2\operatorname{otg}^2\theta_s + a^2} + \frac{2[\mu^2\operatorname{otg}^2\theta_s(1+\operatorname{otg}^2\theta_s) + a^2]}{\sqrt{y^2\operatorname{otg}^2\theta_s + a^2}} \cdot \frac{\alpha(y,M)}{\beta(y,M)}$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \alpha(y,M) = \left\{\mu^2M^2(y^2\operatorname{otg}^2\theta_s + a^2) + (1-\mu^2)[y^2\operatorname{otg}^2\theta_s(1+\operatorname{otg}^2\theta_s) + a^2]\right\}^2\Delta \\ \beta(y,M) = a^2\operatorname{otg}\theta_s\left\{A_2(M^2+1)[y^2\operatorname{otg}^2\theta_s(\operatorname{otg}^2\theta_s - 1) - a^2] + B_2.y^2.\operatorname{otg}^4\theta_s\right\}\frac{M^2}{M^2+1} - \\ \qquad - A_2M^2\left[y^2\operatorname{otg}^2\theta_s(1+\operatorname{otg}^2\theta_s) + a^2\right](y^2\operatorname{otg}^2\theta_s + a^2)\operatorname{otg}^2\theta_s \end{cases}$$

Quand si l'on se place sur l'axe de révolution, la formule (5-1-2) donne pour distance des sommets :

(5-1-6) $$h(a,\theta_s) = \frac{-2[\mu^2M_o^2 + 1-\mu^2]^2\Delta_o}{M_o^2(A_2)_o}a.\operatorname{tg}^2\theta_s$$

en désignant par l'indice zéro la valeur correspondante de M_o, nombre de Mach initial au sommet défini d'après (5-1-4) par :

(5-1-7) $$M_o = M(0) = \frac{\mathcal{M}}{2(1-\mu^2)} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{4(1-\mu^2)^2} + 1}$$

Les valeurs de $(A_2)_o$ et Δ_o en fonction de M_o et μ^2 résultant de (2-4-6).

D'autre part on a : $f''_{y^2}(y,a) = \dfrac{-a^2\operatorname{otg}\theta_s}{(y^2\operatorname{otg}^2\theta_s + a^2)^{3/2}}$. Par conséquent pour toutes les valeurs de y non nulles on a : $f''_{y^2}(y,o) = 0$ ainsi que les dérivées d'ordre supérieur. De même (5- -6) montre que : $h(0,\theta_s) = 0$.

Supposons alors que $a \to 0$. L'obstacle hyperboloïde tend vers son cône asymptote d'angle au sommet $2\theta_s$. D'après les valeurs limites de α et β, la formule (5-1-5) s'écrit alors :

(5-1-8) $$\lim_{a\to 0} F(y,a) = F(y) = -y.\operatorname{otg}\theta_s - \frac{2[\mu^2M^2 + (1-\mu^2)(1+\operatorname{otg}^2\theta_s)]^2.\Delta}{A_2M^2}y.\operatorname{otg}\theta_s$$

La formule (5-1-4) conduit de même à :

(5-1-9) $$\lim_{a\to 0} M(y,a) = M = \frac{\mathcal{M}\sin\theta_s}{2(1-\mu^2)} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2\sin^2\theta_s}{4(1-\mu^2)^2} + 1}$$

Enfin la formule (5-1-6) conduit à :

$$\lim_{a \to 0} h(a, \theta_s) = 0$$

Par conséquent l'approximation du premier ordre pour les chocs détachés stationnaires valable pour les grandes valeurs de $\mathcal{M}$ conduit naturellement à une approximation de même nature relative aux chocs attachés stationnaires pour un obstacle constitué par un cône de révolution.

Par suite l'équation approchée du cône de choc de révolution relatif à l'obstacle d'ouverture $2\theta_s$ s'écrit :

$$F(y) = \frac{2[\mu^2 M^2 + (1-\mu^2)(1+\operatorname{ctg}^2\theta_s)]^2 . \Delta . \sin^2\theta_s + M^2 A_2 \cos^2\theta_s}{M^2 A_2 \cos\theta_s \sin\theta_s} \tag{5-1-10}$$

le nombre de Mach normal M constant le long d'une génératrice étant défini par (5-1-9).

Enfin si l'on considère les formules donnant les valeurs de $[F'''_{t^3}(y,0)]_{(R)}$ et $[F^{IV}_{t^4}(y,0)]_{(R)}$ au chapitre second, on constate que ces dérivées sont nulles pour l'obstacle a = 0. Par conséquent pour un obstacle conique de révolution en mouvement (R) la méthode des séries tronquées ne fournit pas d'approximation meilleure par la considération des termes d'ordre trois et quatre c'est-à-dire des transformations du second ordre de Padé-Shanks.

L'ouverture $2\theta_w^\circ$ du cône de choc est déterminée à partir de (5-1-10) en remplaçant les expressions de A_2 et Δ en fonction de M [formule (2-4-6)]. On obtient la valeur suivante :

$$\operatorname{tg}\theta_w^\circ = \frac{M^2(M^2-1)[\mu^2M^2+1-\mu^2][(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\cos\theta_s . \sin^3\theta_s}{M^2(M^2-1)[\mu^2M^2+1-\mu^2][(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\cos^2\theta_s \sin^2\theta_s - 2[\mu^2M^2\sin^2\theta_s+1-\mu^2]^2[(3\mu^2+1)M^4 - (2\mu^2-3)M^2-\mu^2]} \tag{5-1-11}$$

Quel que soit M on en conclut que $\vartheta_w^\circ \to 0$ lorsque l'ouverture ϑ_s tend vers zéro.

Mais il ne faut point oublier les hypothèses pour obtenir les approximations de Shanks, les chocs et les obstacles étant confondus au départ. Or $\vartheta_w^\circ - \vartheta_s$ est d'autant plus faible que $\mathcal{M}$ est grand, l'attachement étant toujours réalisé. Par conséquent il est naturel d'admettre (5-1-11) comme approximation valable pour des obstacles de grande ouverture animé de grande vitesse.

Les résultats numériques les plus nombreux relatifs aux écoulements coniques sont ceux de Z. Kopal. On peut comparer la formule (5-1-11) dans un cas particulier avec les résultats de cet auteur. Si l'on choisit $\mu^2 = 1/6$ on peut écrire (5-1-11) sous la forme :

$$(5\text{-}1\text{-}12)\qquad tg\,\theta_w^\circ = \frac{6M^2(M^2-1)(M^2+5)(7M^2-1).\cos\theta_s.\sin^3\theta_s}{6M^2(M^2-1)(M^2+5)(7M^2-1).\cos^2\theta_s.\sin^2\theta_s - 2(M^2\sin^2\theta_s+5)^2.(9M^4+16M^2-1)}$$

Cette formule est donc relative à un gaz diatomique. Elle est illustrée par la figure (7) établie pour diverses valeurs de l'ouverture de l'obstacle.

Dans le cas d'une vitesse infinie de l'obstacle la formule (5-1-12) s'écrit :

$$(5\text{-}1\text{-}13)\qquad tg\,\theta_w^\circ = \frac{7\cos\theta_s\sin\theta_s}{7-10\sin^2\theta_s}$$

et la comparaison avec les résultats numériques de Z.Kopal résulte du tableau suivant :

θ_s	θ_w° (Kopal)	Formule (5-1-13)
50°	57°,73	71°,50
45°	51°,06	59°,98
40°	44°,88	49°,73
35°	38°,97	41°,35
30°	33°,27	33°,83
25°	27°,56	27°,03
20°	21°,98	20°,81
15°	16°,45	15°,11

.Lorsque l'obstacle est d'ouverture très faible (obstacle pratiquement rectiligne) le choc est infiniment faible pour $\mathcal{M}$ voisin de l'unité. La position de ce choc dans le voisinage de la singularité a été étudiée par Broderick sous forme de développement entier en puissance de θ_s. Cet auteur a obtenu :

$$(5\text{-}1\text{-}14)\qquad tg\,\theta_w^\circ = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}^2-1}} + \frac{3}{8}\left[\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}\right]^2 \cdot \frac{\mathcal{M}^8}{(\mathcal{M}^2-1)^{5/2}}\,tg^4\theta_s + \mathcal{O}[\theta_s^6.\log\theta_s]$$

Cette formule est très bien vérifiée pour les petites valeurs de $\mathcal{M}-1$ et de θ_s (figure 6). On pourra consulter à ce sujet notre travail : " Etude théorique du nombre de Mach d'attachement sdans les écoulements de révolution " (3ème cycle - Faculté de Marseille -1961).

La formule (5-1-11) se présente donc comme la formule complémentaire de (5-1-14) : elle n'est valable que pour de grandes vitesses et de grandes ouvertures.

La formule (5-1-14) est un développement entier par rapport aux données du problème des écoulements coniques : $\mathcal{M}$, θ_s et μ^2. Mais dans la formule (5-1-11), M joue le rôle de variable auxiliaire. On peut établir un développement analogue à (5-1-14)

en posant : $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Alors (5-1-9) s'écrit :

(5-1-15) $$\mathcal{M} = \frac{1-\mu^2}{\sin\theta_s} \cdot \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

Dans ces conditions on peut écrire successivement :

(5-1-16)
$$\begin{cases} M^2(M^2-1)[\mu^2M^2+1-\mu^2][(1+\mu^2)M^2-\mu^2] = \frac{1}{\varepsilon^8}\left[\mu^2(1+\mu^2)+(-3\mu^4-\mu^2+1)\varepsilon^2+\mathcal{O}(\varepsilon^4)\right] \\ \left[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2\right]\times(\mu^2M^2\sin^2\theta_s+1-\mu^2)^2 = \frac{1}{\varepsilon^8}\left[\mu^4(3\mu^2+1)\sin^4\theta_s + \mu^2\sin^2\theta_s\left[2(1-\mu^2)(3\mu^2+1)-\mu^2(2\mu^2-3)\sin^2\theta_s\right]\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right] \end{cases}$$

Par conséquent on en déduit que pour les grandes valeurs de $\mathcal{M}$ et de θ_s, $tg\,\theta_w^o$ peut être approché sous forme de série en $\frac{1}{\mathcal{M}}$ par le polynôme suivant :

(5-1-17)
$$\begin{cases} tg\,\theta_w^o = \dfrac{(1+\mu^2)\cos\theta_s\sin\theta_s}{1+\mu^2-(6\mu^4+3\mu^2+1)\sin^2\theta_s} + \\ \\ + 2(1-\mu^2)^2\cdot ctg\,\theta_s \cdot \dfrac{2(1-\mu^4)(3\mu^2+1)-\sin^2\theta_s\left[\mu^2(1+\mu^2)(2\mu^2-3)+(3\mu^2+1)(-3\mu^4-\mu^2+1)\right]}{\left[1+\mu^2-(6\mu^4+3\mu^2+1)\sin^2\theta_s\right]^2}\cdot\dfrac{1}{\mathcal{M}^2} \end{cases}$$

Il peut fournir un premier ordre de grandeur pour la détermination pratique de tg_w^o.

2) <u>Cônes quelconques du second ordre</u>.

La méthode précédente permettant d'atteindre les écoulements coniques de révolution dans le cas d'un choc attaché par l'intermédiaire d'un obstacle hyperboloïde peut être étendue aux mouvements (E).
A,B,C,D,E désignant des constantes non toutes nulles et a un paramètre, soit l'obstacle d'équation :

$$x = f(y,z,a) = Ay + Bz - \sqrt{Cy^2 + Dz^2 + 2Eyz + a^2}$$

Un calcul immédiat montre que les dérivées de f jusqu'au second ordre sont des fonctions continues de a. Or U , Ω , M ainsi que les polynômes A_2 , B_2 et Δ ne

s'annulent point pour $a = 0$ .Par conséquent $a = 0$ n'est pas une singularité pour l'équation approchée (5-1-1) qui demeure applicable à l'obstacle d'équation $x = f(y,z,o)$.

D'autre part si $a \to 0$ l'obstacle tend vers un cône du second ordre.Dans ces conditions $\omega \to \infty$ et la formule (4-3-5) montre que $h \to 0$,son second membre étant borné.Par conséquent l'équation approchée (5-1-1) est valable pour les chocs attachés à la pointe des cônes du second ordre.

Soit alors le cône général du second ordre :

(5-2-1)
$$x = A\,y + B\,z - \sqrt{C\,y^2 + D\,z^2 + 2\,E\,y\,z}$$

Pour simplifier les calculs il est utile de poser la quantité suivante :

$$\Phi(y,z) = C\,y^2 + D\,z^2 + 2\,E\,y\,z$$

Dans ces conditions les valeurs des dérivées de la fonction $f(y,z,o)$ ont pour expressions :

$$\begin{cases} f'_y = \dfrac{A\,\Phi^{1/2} - C\,y - D\,z}{\Phi^{1/2}} \\ f'_z = \dfrac{B\,\Phi^{1/2} - D\,z - E\,y}{\Phi^{1/2}} \\ f''_{y^2} = \dfrac{(E^2 - C\,D)z^2}{\Phi^{3/2}} \\ f''_{z^2} = \dfrac{(E^2 - C\,D)y^2}{\Phi^{3/2}} \end{cases} \qquad \left\{ f''_{zy} = \frac{B\,\Phi^{1/2} - D\,z - E\,y}{\Phi^{1/2}} \right.$$

d'où l'on déduit les valeurs suivantes :

$$(5\text{-}2\text{-}2)\qquad \begin{cases} \Omega = \dfrac{\alpha_4(y,z) + \Phi^{1/2}(y,z).\beta_3(y,z)}{\Phi^{5/2}(y,z)} \\ U = \dfrac{\alpha_2(y,z) + \Phi^{1/2}(y,z).\alpha_1(y,z)}{\Phi(y,z)} \\ 2\Omega - U(f''^2_y + f''^2_z) = \dfrac{\gamma_4(y,z) + \Phi^{1/2}(y,z).\alpha_3(y,z)}{\Phi^{5/2}(y,z)} \end{cases}$$

dans lesquelles α, β et γ sont des polynômes homogènes dont le degré est égal à l'indice.

D'autre part (5-1-3) a pour expression :

$$(5\text{-}2\text{-}3)\qquad M(y,z) = \frac{\mathcal{H}}{2(1-\mu^2)}\cdot\frac{\Phi^{1/2}}{(\alpha_2+\Phi^{1/2}.\alpha_1)^{1/2}} + \sqrt{\frac{\mathcal{H}^2.\Phi}{4(1-\mu^2)^2(\alpha_2+\Phi^{1/2}\alpha_1)} + 1}$$

Dans ces conditions (5-1-1) détermine l'équation approchée au premier ordre de la surface du choc relative à l'obstacle (5-2-1) sous la forme suivante :

$$(5\text{-}2\text{-}4)\qquad F(y,z) = Ay + Bz - \Phi^{1/2}\,\frac{2(\alpha_2+\Phi^{1/2}\alpha_1)[\mu^2M^2\Phi+(1-\mu^2)\alpha_2+(1-\mu^2)\Phi^{1/2}\alpha_1]^2.(M^2+1).\Delta}{[(\gamma_4+\Phi^{1/2}\alpha_3)A_2(M^2+1)+(\alpha_4+\Phi^{1/2}\beta_3)B_2]\Phi^{1/2}M^2}$$

dans laquelle M est la valeur (5-2-3) et où les coefficients A_2 B_2 et Δ sont définis par (2-4-6).

Cette équation par rapport aux variables y,z et $Ay + Bz$ est par conséquent une cône algébrique .On peut en étudier les sections par des plans contenant la direction de la vitesse du sommet.Posant $z = \lambda y$ d'après l'homogénéité des polynômes α, β et γ, on peut écrire :

$\alpha_2 = a_2y^2$, $\alpha_1 = a_1y$, $\beta_3 = a_3y^3$, $\gamma_4 = a_4y^4$ et $\Phi = \lambda^2k^2y^2$ en appelant a_i des fonctions de λ seulement.Dans ces conditions :

$$(5\text{-}2\text{-}5)\qquad M(y,\lambda y) = \frac{\mathcal{H}\,|\lambda k|}{2(1-\mu^2)(a_2+|\lambda k|a_1)} + \sqrt{\frac{\mathcal{H}^2.\lambda^2k^2}{4(1-\mu^2)^2(a_2+|\lambda k|a_1)^2} + 1}$$

est une constante ne dépendant que du plan choisi. On peut aussi écrire :

$$(5\text{-}2\text{-}6)\quad \begin{cases} (\alpha_2+\Phi^{1/2}\alpha_1)[\mu^2M^2\Phi+(1-\mu^2)\alpha_2+(1-\mu^2)\Phi^{1/2}\alpha_1]^2 = P_6(y,|\lambda k|) \\ [(\gamma_4+\Phi^{1/2}\alpha_3)A_2+(\alpha_4+\Phi^{1/2}\beta_3)B_2]\Phi^{1/2} = Q_5(y,|\lambda k|) \end{cases}$$

en désignant par P_6 et Q_5 des polynômes homogènes de degré 6 et 5 en y.
L'équation de la section de (5-2-4) par $z = x\,y$ est donc :

$$(5\text{-}2\text{-}7)\quad F(y,\lambda y) = (A+B\lambda)y - |\lambda k|y - \frac{2\,P_6(y,|\lambda k|)}{Q_5(y,|\lambda k|)}\cdot\frac{M^2+1}{M^2}\,\Delta$$

Elle représente par conséquent les deux génératrices du cône de choc situées dans le plan considéré et correspondant aux valeurs $\pm\lambda k$. Afin de préciser les éléments géométriques que l'on utilise pour des obstacles pratiques, il est nécessaire de particulariser ceux-ci.

3) Cônes elliptiques en écoulement symétrique (cas E)

On suppose l'obstacle réduit à un cône du second ordre dont un plan de symétrie est le plan x o y, la direction de son mouvement ayant lieu parallèlement à o x.
L'écoulement est donc symétrique par rapport à ce plan et l'équation de l'obstacle s'écrit :

$$(5\text{-}3\text{-}1)\quad x = A\,y - \sqrt{Cy^2+Dz^2}$$

Les formules (5-2-2) ont alors pour expressions :

$$(5\text{-}3\text{-}2)\quad \begin{cases} \Omega = \dfrac{-CD}{\Phi^{5/2}}\left\{[A^2C+(C-D)^2]y^2z^2+A^2Dz^4+2A(D-C)yz^2\Phi^{1/2}\right\} \\ U = \dfrac{C^2y^2+D^2z^2+(1+A^2)\Phi-2ACy\,\Phi^{1/2}}{\Phi} \\ 2\Omega-U(f''_{y^2}+f''_{z^2}) = \dfrac{-CD}{\Phi^{5/2}}\left\{\begin{array}{l}[2A^2C+C^2-4CD-(C+D)(1+A^2)]y^2z^2-C^2y^4-D^2z^4-(1+A^2)(Cy^4+Dz^4)+ \\ +2A^2Dz^4-2[ACy^3+2A(D-C)yz^2]\Phi^{1/2}\end{array}\right\} \end{cases}$$

La valeur de $M(y,z)$ définie par (5-2-3) s'écrit :

$$(5\text{-}3\text{-}3)\quad M(y,z) = \frac{\mathcal{M}\alpha^{1/2}}{2(1-\mu^2)} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2\alpha}{4(1-\mu^2)^2}+1}$$

avec la valeur :

$$\alpha(y,z) = \frac{\Phi}{C^2y^2+D^2z^2+(1+A^2)\Phi-2ACy\,\Phi^{1/2}}$$

On calcule enfin les quantités :

(5-3-4)
$$\begin{cases} \alpha_2+\Phi^{1/2}\alpha_1 = C^2y^2+D^2z^2+(1+A^2)\Phi-2ACy\,\Phi^{1/2} \\ \\ \gamma_4+\Phi^{1/2}\alpha_3 = -CD\Big\{2[A^2C+C^2-4CD-(C+D)(1+A^2)]y^2z^2-c^2y^4-D^2z^4-(1+A^2)(Cy^4+Dz^4) \\ \qquad +2A^2Dz^4-2[ACy^3+2A(D-C)yz^2]\Phi^{1/2}\Big] \\ \\ \alpha_4+\Phi^{1/2}\beta_3 = -CD\Big\{[A^2C+(C-D)^2]y^2z^2+A^2Dz^4+2A(D-C)yz^2\Phi^{1/2}\Big\} \end{cases}$$

Dans ces conditions l'approximation (5-2-4) s'écrit sous la forme suivante :

(5-3-5)
$$F(y,z) = Ay - \sqrt{Cy^2+Dz^2} - 2\,\frac{M^2+1}{M^2}\,\Delta.\,\frac{P(M,\sqrt{Cy^2+Dz^2})}{Q(M,\sqrt{Cy^2+Dz^2})}$$

dans laquelle on a posé les valeurs suivantes :

(5-3-6)
$$\begin{cases} P(y,z) = \Big[\mu^2M^2\Phi+(1-\mu^2)(1+A^2)\Phi+(1-\mu^2)C^2y^2+(1-\mu^2)D^2z^2-2(1-\mu^2)ACy\Phi^{1/2}\Big]^2\times \\ \qquad \times\Big\{(1+A^2)\Phi+C^2y^2+D^2z^2-2ACy\Phi^{1/2}\Big\} \\ \\ Q(y,z) = -CD\Phi^{1/2}\Big\{[2A^2C+C^2-4CD-(C+D)(1+A^2)]y^2z^2-c^2y^4-D^2z^4-(1+A^2)(Cy^4+Dz^4)+ \\ \qquad +2A^2Dz^4-2[ACy^3+2A(D-C)yz^2]\Phi^{1/2}\Big\}.A_2(M^2+1) - \\ \qquad -CD\Phi^{1/2}\Big\{[A^2C+(C-D)^2]y^2z^2+A^2Dz^4+2A(D-C)yz^2\Phi^{1/2}\Big\}\,.B_2 \end{cases}$$

La complexité de ces expressions rend difficile l'application directe de (5-3-5) en vue de calculs numériques. Il parait préférable de traduire les calculs précédents à l'aide de paramètres angulaires qui permettront de préciser les positions des génératrices du choc situées dans le plan de symétrie de l'écoulement.
Si l'on désigne par ε l'inclinaison de l'axe de symétrie du cône situé dans le plan x o y, par 2φ l'angle de ses génératrices situées dans ce plan et par 2θ l'angle analogue relatif au second plan de symétrie contenant Oz, les nombres A, C et D ont pour expression :

(5-3-7)
$$\begin{cases} A = \dfrac{\sin 2\varepsilon}{2\sin(\varphi+\varepsilon).\sin(\varphi-\varepsilon)} \qquad C = \dfrac{\cos^2\varphi.\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi+\varepsilon).\sin^2(\varphi-\varepsilon)} \\ D = \dfrac{\cos^2\theta.\sin^2\varphi}{\sin^2\theta\ \sin(\varphi+\varepsilon).\sin(\varphi-\varepsilon)} \end{cases}$$

On peut alors appliquer la formule (5-3-5) et (5-3-4) qui donneront les génératrices du cône de choc situées dans le plan x o y .Les expressions (5-3-6) permettent de calculer :

(5-3-8)
$$\frac{P_6(y,0)}{Q_5(y,0)} = \mp \frac{\left[\mu^2M^2C + (1-\mu^2)(1+A^2)C + (1-\mu^2)C^2 \mp 2AC^{3/2}\right]^2}{C^{3/2}D}\, y$$

La formule (5-2-7) s'écrit alors :

(5-3-9)
$$F(y) = A\,y \mp C^{1/2}y \mp \frac{2\left[\mu^2M^2C + (1-\mu^2)(1+A^2)C + (1-\mu^2)C^2 \mp 2AC^{1/2}\right]^2 \Delta}{C^{1/2}D.A_2M^2}\, y$$

et la valeur correspondante de M s'écrit :

(5-3-10)
$$M = \frac{\mathcal{M}}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{1}{[C+1+A^2 \mp 2AC^{1/2}]^{1/2}} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{4(1-\mu^2)^2[C+1+A^2 \mp 2AC^{1/2}]} + 1}$$

Soient α_1 et α_2 les inclinaisons par rapport à la vitesse des génératrices du cône de choc situées dans le plan de symétrie de l'écoulement.Dans ces conditions la formule (5-3-9) détermine la valeur approchée suivante pour tg α_1 et tg α_2 :

(5-3-11)
$$tg\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \frac{-A_2M^2.\sin\varphi.\cos^2\theta.\sin(\varepsilon \mp \varphi)}{A_2M^2\sin\varphi\cos^2\theta\cos(\varepsilon\mp\varphi) \mp 2\Delta[\mu^2M^2 + (1-\mu^2)[1+\mathrm{ctg}^2(\varepsilon\mp\varphi)]].\sin^2\theta.\cos\varphi.\sin(\varepsilon\mp\varphi)}$$

La valeur de M résultant de (5-3-10) s'écrit :

(5-3-12)
$$M(\mp\varepsilon) = \frac{\mathcal{M}}{2(1-\mu^2)}\sin(\varphi\mp\varepsilon) + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{4(1-\mu^2)^2}\sin^2\varphi(\mp\varepsilon) + 1}$$

La formule (5-3-11) se simplifie si l'on rapporte les directions des génératrices du cône de choc à l'axe de symétrie de l'obstacle situé dans leur plan.
Si θ_w^{φ} et $\theta_w^{-\varphi}$ sont les angles de ces génératrices avec cet axe de symétrie, leurs valeurs approchées sont définies à partir de la formule suivante :

(5-3-13)
$$tg(\varepsilon+\theta_w^{\varphi}) = \frac{-A_2M^2.tg(\varepsilon+\varphi)}{A_2M^2+2\Delta[\mu^2M^2+(1-\mu^2)[1+otg^2(\varepsilon+\varphi)]]^2.tg^2\theta\,.otg\varphi\,.tg(\varepsilon+\varphi)}$$

où l'on choisira $M(+\varepsilon)$ défini par (5-3-12).La formule analogue relative à $tg(\varepsilon+\theta_w^{-\varphi})$ s'obtient par changement de φ en $-\varphi$ dans (5-3-13) et en choisissant la valeur $M(-\varepsilon)$.

-Cas de l'inclinaison nulle-

Si l'axe de l'obstacle situé dans le plan de symétrie a une inclinaison nulle $\varepsilon = 0$: l'écoulement présente alors un second plan de symétrie et les angles θ_w^{φ} et $\theta_w^{-\varphi}$ sont confondus.

Dans ces conditions d'après (5-3-12) les 2 valeurs de M sont confondues et les valeurs opposées $tg(\theta_w^{\varphi})$ et $tg(\theta_w^{-\varphi})$ sont définies par la valeur unique suivante :

(5-3-14)
$$tg(\theta_w^{\varphi}) = \frac{-M^2(M^2-1)[\mu^2M^2+1-\mu^2][(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\cos^2\theta.\sin^5\varphi}{M^2(M^2-1)[\mu^2M^2+1-\mu^2][(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\cos^2\theta\cos\varphi\sin^4\varphi-2\left[\begin{matrix}\mu^2M^2\sin^2\varphi\\+1-\mu^2\end{matrix}\right]^2\left[\begin{matrix}(3\mu^2+1)M^4\\-(2\mu^2-3)M^2\\-\mu^2\end{matrix}\right]\sin^2\theta\,.\cos\varphi}$$

On peut comparer cette formule avec (5-1-11) relative à l'obstacle de révolution en écoulement (R).Les conditions d'application de cette formule demeurent valables pour la formule précédente ainsi que pour la formule (5-3-13).On peut opérer en ce qui concerne la formule (5-3-14) comme pour (5-1-11) en cherchant à déterminer un polynôme approchant $tg\,\theta_w^{\varphi}$.Posant de même $M = \frac{1}{\varepsilon}$ on peut écrire :

(5-3-15)
$$\mathcal{M} = \frac{1-\mu^2}{\sin\varphi}\,\frac{1}{\varepsilon} + \theta\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

On peut alors écrire :

$$M^2(M^2-1)[\mu^2M^2+1-\mu^2][(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\cos^2\theta\,.\cos\varphi\,.\sin^4\varphi-$$
$$-2[\mu^2M^2\sin^2\varphi+1-\mu^2]^2[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]\sin^2\theta\,\cos\varphi =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^8}\Big[\mu^2\cos\varphi\sin^4\varphi[(1+\mu^2)\cos^2\theta-2\mu^2(3\mu^2+1)\sin^2\theta]+$$
$$+\varepsilon^2\cos\varphi\sin^2\varphi[(-3\mu^4-\mu^2+1)\cos^2\theta\sin^2\varphi-2\mu^2\sin^2\theta[2(1-\mu^2)(3\mu^2+1)-\mu^2(2\mu^2-3)\sin^2\theta]\Big]$$

Dans ces conditions en utilisant (5-3-15) on obtient,toutes réductions faites,le polynôme suivant en $\frac{1}{\mathcal{M}}$:

$$tg\,\theta_w^{\varphi} = \frac{-(1+\mu^2)\cos^2\theta\,.\sin\varphi}{\cos\varphi[\,1+\mu^2-(6\mu^4+3\mu^2+1)\sin^2\theta}$$

(5-3-16)

$$-2(1-\mu^2)^2\,\frac{\cos^2\theta\,.\sin^2\theta}{\cos\varphi\,.\sin^3\varphi}\,.\,\frac{2(1+\mu^2)(1-\mu^2)(3\mu^2+1)-\mu^2(1+\mu^2)(2\mu^2-3)\sin^2\theta}{-(3\mu^2+1)(3\mu^4-\mu^2+1)\sin^2\varphi}{[\,1+\mu^2-(6\mu^4+3\mu^2+1)\sin^2\theta\,]^2}\,.\,\frac{1}{\mathcal{M}^2}$$

4) <u>Position de la bissectrice des génératrices du choc.</u>

Soit δ l'inclinaison des génératrices du choc situées dans le plan de symétrie $z = 0$. On a donc :

(5-4-1) $$tg[\,2\delta\,] = tg[\,\theta_w^{\varphi} + \theta_w^{-\varphi} + 2\,\varepsilon]$$

Si l'on pose $tg\,\theta_w^{\varphi} = a$, de la formule (5-3-14) résulte que $tg\,\theta_w^{-\varphi} = -\,a$. Par conséquent la relation (5-4-1) s'écrit quel que soit ε :

$$tg\,2\,\delta = \frac{2\,tg\,\varepsilon + 2\,a^2 tg\,\varepsilon}{1+a^2 - a^2 tg^2\varepsilon - tg^2\varepsilon}$$

Cela conduit à la relation :

(5-4-2) $$\boxed{\delta = \varepsilon}$$

Ce résultat ne dépend que des approximations $tg(\varepsilon + \theta_w^{\varphi})$ au premier ordre au sens de Shanks. Il est indépendant de la valeur de ε et valable en particulier pour un cône circulaire de révolution placé sous l'incidence ε. Si l'on considérait les approximations du second ordre de Shanks, la fonction $\delta[\varepsilon, M]$ dépendrait effectivement de M mais leurs expressions dépassent les limites raisonnables d'écriture.

Les calculs numériques effectués à ce sujet par Z. Kopal sont relatifs à un cône de révolution incliné. La méthode utilisée développe la fonction $\delta[\varepsilon, M]$ en puissance entière de ε et les résultats numériques sont relatifs aux premier et second termes du développement. L'auteur pose que pour $\varepsilon \neq 0$ le cône de choc est encore de révolution, ce qui n'a pas lieu dans la méthode que l'on considère ici.

La comparaison des résultats numériques de cet auteur avec (5-4-2) résulte du tableau suivant établi pour $\mathcal{M} : \infty$, $\gamma = 1{,}405$ et pour un obstacle de révolution:

θ_s	θ_w num.	$\frac{\delta}{\varepsilon}$ num.	Formule (5-3-13)	Formule (5-4-2)
45°	51,06	1,14	59°,98	1
40°	44,88	1,11	49°,73	1
35°	38,97	1,09	41°,35	1
30°	33,22	1,08	33°,83	1
25°	27,56	1,07	27°,03	1
20°	21,98	1,06	20°,81	1

- Par conséquent on peut admettre que pour de grandes valeurs de $\mathcal{M}$, pour une inclinaison ε donnée, la relation $\delta = \varepsilon$ se trouve assez bien vérifiée pour un obstacle conique circulaire dans le cas où l'écoulement est symétrique par rapport au plan contenant les directions du choc θ_w^{φ} et $\theta_w^{-\varphi}$ dont la bissectrice a la direction δ.

5) Première approximation de Shanks des chocs coniques.

Tant que les hypothèses de calcul de (5-1-1) ou (5-1-2) sont valables et dans tout domaine qui ne contient pas une singularité, ces approximations demeurent valables. Dans le cas où l'obstacle est un cône circulaire on vient de préciser les éléments géométriques du cône de choc.

Les polynômes $A_2(M)$ et $B_2(M)$ étant bornés, l'approximation (5-1-1) est valable en particulier pour tout obstacle tel que $\Omega(y,z)$ et $U(y,z)$ sont finis non nuls.

Si l'on choisit pour obstacle analytique :

(5-5-1) $$x = z.\varphi\left(\frac{y}{z}\right)$$

on peut calculer :

(5-5-2) $$\begin{cases} U = \frac{1}{z^2}\left[(1+\varphi^2)z^2+(y^2+z^2)\varphi'^2-2yz\varphi\varphi'\right] \\ \Omega = \frac{\varphi''}{z^5}\left[(y^4+z^4)\varphi'^2+3y^2z^2\varphi^2-2yz(y^2+z^2)\varphi\varphi'\right] \end{cases}$$

les accents indiquant des dérivations par rapport à $u = \frac{y}{z}$. Dans ces conditions l'approximation de Shanks du premier ordre s'écrit :

(5-5-3) $$F(y,z) = z.\varphi(u) - \frac{2(M^2+1)\Delta}{M^2} \times \frac{\left[\mu^2M^2+(1-\mu^2)\left[1+\varphi^2+(u^2+1)\varphi'^2-2u\varphi\varphi'\right]\right]^2\left[1+\varphi^2+(u^2+1)\varphi'^2-2u\varphi\varphi'\right]}{(M^2+1)A_2\begin{bmatrix}-(u^2+1)-2u^2(u^2+1)\varphi\varphi'+\\+(u^2-1)^2\varphi'^2+(5u^2-1)\varphi^2\end{bmatrix}+B_2\begin{bmatrix}(u^4+1)\varphi'^2+3u^2\varphi'^2-\\-2u(u^2+1)\varphi\varphi'\end{bmatrix}} \times \frac{z}{\varphi''}$$

la valeur correspondante de M étant alors :

(5-5-4) $$M(u) = \frac{\mathcal{M}}{2(1-\mu^2)\sqrt{1+\varphi^2+(u^2+1)\varphi'^2-2u\varphi\varphi'}} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{4(1-\mu^2)^2\left[1+\varphi^2+(u^2+1)\varphi'^2-2u\varphi\varphi'\right]}+1}$$

$A_2(M,\mu^2)$, $B_2(M,\mu^2)$ et $\Delta(M,\mu^2)$ étant définis par (2-4-6).

- Par conséquent (5-5-3) représente l'équation approchée de la surface de choc relative à l'obstacle conique (5-5-1) à condition que celui-ci ne se réduise pas à un plan. Ce cône de choc est défini de la même façon que l'obstacle auquel il correspond.

Il est clair, d'après les expressions de $F'''_3(y\,z\,o)$ et $F^{IV}_4(y\,z\,o)$ que l'on a calculé que, pour un cône quelconque, l'approximation du second^{t} ordre diffère de l'approximation du premier ordre.

A la génératrice G_u de l'obstacle définie à partir de $\frac{x}{z} = \varphi(u)$ faisons correspondre la génératrice G_v du choc définie par $\frac{x}{z} = v$, v étant de la forme $\frac{P}{Q}$ où l'on a posé :

$$
\left\{
\begin{aligned}
P(u,M^2) &= \varphi.\varphi'' A_2 M^2[-(u^2+1)-2u^2(u^2+1)\varphi\varphi'+(u^2-1)^2\varphi'^2+(5u^2-1)\varphi^2](M^2+1)+ \\
&\quad +\varphi\varphi'' B_2 M^2[(u^4+1)\varphi'^2+3u^2\varphi^2-2u(u^2+1)\varphi\varphi'] - \\
&\quad -2(M^2+1)\Delta[\mu^2M^2+(1-\mu^2)[1+\varphi^2+(u^2+1)\varphi'^2-2u\varphi\varphi']]^2[1+\varphi^2+(u^2+1)\varphi'^2-2u\varphi\varphi'] \\
R(u,M^2) &= \varphi'' A_2 M^2[-(u^2+1)-2u^2(u^2+1)\varphi\varphi'+(u^2-1)\varphi'^2+(5u^2-1)\varphi^2](M^2+1) + \\
&\quad +\varphi'' B_2 M^2[(u^4+1)\varphi'^2+3u^2\varphi^2-2u(u^2+1)\varphi\varphi']
\end{aligned}
\right. \qquad (5\text{-}5\text{-}5)
$$

dans lesquels les expressions de A_2, B_2 et M^2 sont connues par ailleurs en fonction de μ^2, $\mathcal{M}$ et G_u.

Afin d'obtenir des résultats plus substantiels, il faut préciser davantage l'obstacle Par des procédés classiques on peut toutefois préciser la courbe de choc correspondant à la courbe de l'obstacle située dans un plan perpendiculaire à la direction de la vitesse de l'écoulement non perturbé. L'équation de cette courbe de choc résulte de (5-5-4) et peut s'écrire :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(\varphi z-1).\left(A_2(M^2+1)\varphi''\begin{bmatrix}-(u^2+1)-2u^2(u^2+1)\varphi\varphi' \\ +(u^2-1)\varphi'^2+(5u^2-1)\varphi^2\end{bmatrix} + B_2M^2.\varphi''\left[(u^4+1)\varphi'^2+3u^2\varphi^2-2u(u^2+1)\varphi\varphi'\right]\right) = \\
&= 2(M^2+1)\Delta.\left[\mu^2M^2+(1-\mu^2)[1+\varphi^2+(u^2+1)\varphi'^2-2u\varphi\varphi']\right]^2[1+\varphi^2+(u^2+1)\varphi'^2-2u\varphi\varphi']
\end{aligned}
\right. \qquad (5\text{-}5\text{-}6)
$$

La variable auxilaire M(u) étant définie par (5-5-4) et la courbe associée de l'obstacle ayant pour équation : $\varphi z - 1 = 0$.

Par des procédés standard en posant $u = \operatorname{otg}\alpha$ et $z = \rho \sin\alpha$ on détermine successivement :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\varphi' = -\sin^2\alpha.\varphi'(\alpha) \quad ; \quad \varphi'' = \sin^4\alpha[\varphi''(\alpha)+2\operatorname{otg}\alpha.\varphi'(\alpha)] \\
&-(u^2+1)-2u^2(u^2+1).\varphi\varphi'+(u^2-1)\varphi'^2+(5u^2-1).\varphi^2 = -(1+\operatorname{otg}^2\alpha)^2+ \\
&\qquad +\begin{bmatrix}+2\operatorname{otg}^2\alpha(\operatorname{otg}^2\alpha+1)^2.\varphi\varphi'+(1-\operatorname{otg}^2\alpha)^2.\varphi'^2+ \\ +(1+\operatorname{otg}^2\alpha)^2(5\operatorname{otg}^2\alpha-1).\varphi\end{bmatrix}\frac{1}{1+\operatorname{otg}^2\alpha} \\
&(u^4+1)\varphi'^2+3u^2\varphi^2-2u(u^2+1)\varphi\varphi' = \frac{1}{(\operatorname{otg}^2\alpha+1)^2}\left[(1+\operatorname{otg}^4\alpha)\varphi'^2+3\operatorname{otg}^2\alpha(1+\operatorname{otg}^2\alpha)\varphi^2+2\operatorname{otg}\alpha(1+\operatorname{otg}^2\alpha)^2.\varphi\varphi'\right]
\end{aligned}
\right.
$$

$$1+\varphi^2+(u^2+1)\varphi'^2-2u\varphi\varphi' = \frac{1}{1+\cot g^2\alpha}\left[(1+\varphi^2)(1+\cot g^2\alpha)+\varphi'^2+2\cot g\,\alpha.\varphi.\varphi'\right]$$

Cela permet la construction géométrique de (5-5-6) en portant sur chaque rayon vecteur de la courbe de l'obstacle la quantité positive suivante :

$$\text{(5-5-7)}\qquad \delta(\alpha) = \frac{2\rho.(M^2+1)\Delta.\left[\begin{matrix}\mu^2M^2(1+\cot g^2\alpha)+(1-\mu^2)\left[(1+\varphi^2)(1+\cot g^2\alpha)\right.\\ \left.+\left[\varphi'^2+2\varphi.\varphi'\cot g\,\alpha\right](1-\mu^2)\right]\end{matrix}\right]^2\times\left[\begin{matrix}(1+\varphi^2)(1+\cot g^2\alpha+\\ +\varphi'^2+2\varphi.\varphi'\cot g\,\alpha\end{matrix}\right]}{(\varphi''+2\varphi'.\cot g\alpha)\times\left(\begin{matrix}(M^2+1)A_2M^2\left[\begin{matrix}-(1+\cot g^2\alpha)^3+2\cot g^2\alpha(1+\cot g^2\alpha)^2.\varphi.\varphi'+(1-\cot g^2\alpha)^2\varphi'^2+\\ +(5\cot g^2\alpha-1)(1+\cot g^2\alpha)^2.\varphi^2\end{matrix}\right]+\\ +B_2M^2\left[(1+\cot g^4\alpha)\varphi'^2+3\cot g^2\alpha(1+\cot g^2\alpha)^2\varphi^2+2\cot g\alpha(1+\cot g^2\alpha).\varphi.\varphi'.\right.\end{matrix}\right)}$$

Il serait possible de déterminer les singularités des approximations (5-5-6) et (5-5-7).Sur cette dernière on constate,en plus du cas signalé où l'obstacle se réduit à un plan,que ces équations ne sont pas valables pour un cône ayant une génératrice suivant la direction de la vitesse de l'écoulement amont.

La figure (8) est relative à l'obstacle conique défini par la fonction :

$$\varphi(u) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} + \frac{a}{b^2}\sqrt{1+u^2}$$

qui correspond à un cône elliptique,les axes de la section correspondante étant 2 a et 2 b, un foyer étant l'origine des coordonnées.Sur cette figure on a considéré 3 valeurs du nombre de Mach $\mathcal{M}$ et le cas d'un gaz diatomique.

- Cône de révolution incliné.

Si l'on considère les expressions (5-3-7) pour les valeurs $\varphi = 0 = \theta_s$,l'équation (5-3-1) est celle d'un cône de révolution d'ouverture $2\,\theta_s$ dont l'angle d'attaque est ε.Si l'on choisit alors :

$$\text{(5-5-8)}\qquad \varphi(u) = \frac{1}{\sin(\theta_s+\varepsilon).\sin(\theta_s-\varepsilon)}\left[\sin\varepsilon\cos\varepsilon.u-\cos\theta_s\sqrt{\sin(\theta_s+\varepsilon).\sin(\theta_s-\varepsilon)+u^2.\sin^2\theta_s}\right]$$

la courbe de choc située dans un plan de section perpendiculaire à la vitesse s'obtient par les formules (5-5-6) ou (5-5-7).Les calculs étant toutefois assez longs,il nous a paru préférable d'opérer dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'obstacle.Si l'on se rapporte à la planche hors texte relative aux notations utilisées,le changement de coordonnées à effectuer est défini par :

$$\text{(5-5-9)}\qquad \begin{vmatrix} x\\ y\\ z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon & 0\\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}.\begin{vmatrix} X\\ Y\\ Z\end{vmatrix}$$

Dans ces conditions les grandeurs liées à l'obstacle qui interviennent dans l'approximation (5-1-1) des mouvements à 3 variables ont pour nouvelles expressions :

$$(5\text{-}5\text{-}10)\quad \begin{cases} \Omega = f'^{2}_{Y}.f''_{Y^2}.\cos^4\varepsilon + f'^{2}_{Z}f''_{Z^2} + 2\, f'_{Y}.f'_{Z}.f''_{YZ}.\cos\varepsilon \\ U = 1 + f'^{2}_{Y}.\cos^2\varepsilon + f'^{2}_{Z} \\ 2\Omega - U(f''_{y^2}+f''_{z^2}) = f'^{2}_{Y}.f''_{Y^2}.\cos^4\varepsilon + f'^{2}_{Z}.f''_{Z^2} - f''_{Y^2}.\cos^2\varepsilon - f''_{Z^2} - \\ \qquad -f'^{2}_{Y}f''_{Z^2}\cos^2\varepsilon - f'^{2}_{Z}f''_{Y^2}.\cos^2\varepsilon + 4\, f'_{Y}.f'_{Z}.f''_{YZ}.\cos\varepsilon \end{cases}$$

Si l'on choisit alors pour obstacle le cône de révolution d'axe 0 X et d'ouverture $2\theta_s$, les relations conséquentes de (5-2-1) permettent d'écrire :

$$(5\text{-}5\text{-}11)\quad \begin{cases} f'_Y = -\operatorname{otg}\theta_s.Y(Y^2+Z^2)^{-1/2} & f''_{Y^2} = -\operatorname{otg}\theta_s Z^2(Y^2+Z^2)^{-5/2} \\ f'_Z = -\operatorname{otg}\theta_s.Z(Y^2+Z^2)^{-1/2} & f''_{Z^2} = -\operatorname{otg}\theta_s Y^2(Y^2+Z^2)^{-5/2} \\ f''_{YZ} = \operatorname{otg}\theta_s.YZ.(Y^2+Z^2)^{-5/2} \end{cases}$$

Par substitution dans les relations précédentes, on obtient :

$$(5\text{-}5\text{-}12)\quad \begin{cases} \Omega = \dfrac{\operatorname{otg}^3\theta_s}{(Y^2+Z^2)^{5/2}}(-\cos^4\varepsilon + 2\cos\varepsilon - 1).Y^2Z^2 \\ U = \dfrac{1}{Y^2+Z^2}\left[Y^2+Z^2+\operatorname{otg}^2\theta_s(Y^2\cos^2\varepsilon+Z^2)\right] \\ 2\Omega - U(f''_{y^2}+f''_{z^2}) = \dfrac{\operatorname{otg}^3\theta_s}{(Y^2+Z^2)^{5/2}}.\cos^2\varepsilon.(Y^4+Z^4) + \dfrac{\operatorname{otg}\theta_s}{(Y^2+Z^2)^{3/2}}Y^2 + \\ \qquad + \dfrac{\operatorname{otg}^3\theta_s}{(Y^2+Z^2)^{5/2}}(-\cos^4\varepsilon + 4\cos\varepsilon - 1)Y^2Z^2 + \dfrac{\operatorname{otg}\theta_s}{(Y^2+Z^2)^{3/2}}\cos^2\varepsilon.Z^2 \end{cases}$$

La section du cône de choc par un plan perpendiculaire à son axe résulte alors de l'équation rtransformée de (5-1-1) par le changement d'axes considéré. Elle s'écrit en utilisant les expressions précédentes :

$$(5\text{-}5\text{-}13)\quad M^2.\operatorname{otg}\theta_s.(Y^2+Z^2)^{1/2}.\left[\begin{matrix}-\cos\varepsilon+Y\sin\varepsilon+ \\ +\operatorname{otg}\theta_s(Y^2+Z^2)^{1/2}\end{matrix}\right]\times\left[\begin{matrix}(M^2+1)A_2\left[\begin{matrix}-(1+\cos^4\varepsilon).Y^2Z^2.\operatorname{otg}^2\theta_s+\cos^2\varepsilon.\operatorname{otg}^2\theta_s.Y^4+ \\ +\cos^2\varepsilon.\operatorname{otg}^2\theta_s Z^4+4\cos\varepsilon.\operatorname{otg}^2\theta_s Y^2Z^2+ \\ +(Y^2+Z^2)(Y^2+Z^2\cos^2\varepsilon)\end{matrix}\right]+ \\ +B_2\operatorname{otg}^2\theta_s.Y^2Z^2.[-\cos^4\varepsilon+2\cos\varepsilon-1]\end{matrix}\right]+$$

$$+2(M^2+1)A\times\left[\begin{matrix}\mu^2M^2(Y^2+Z^2)+ \\ +(1-\mu^2)\left[Y^2+Z^2+\operatorname{otg}^2\theta_s(Y^2\cos^2\varepsilon+Z^2)\right]\end{matrix}\right]^2\times\left[\begin{matrix}Y^2Z^2+ \\ +\operatorname{otg}^2\theta_s(Y^2\cos^2\varepsilon+Z^2)\end{matrix}\right]=0$$

La valeur de M(Y,Z) est définie par :

(5-5-14) $$M(Y,Z) = \frac{\mathcal{M}}{2(1-\mu^2)}\cdot\sqrt{\frac{Y^2+Z^2}{Y^2+Z^2+\mathrm{otg}^2\theta_s(Y^2\cos^2\varepsilon+Z^2)}} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2(Y^2+Z^2)}{4(1-\mu^2)^2\left[Y^2+Z^2+\mathrm{otg}^2\theta_s(Y^2\cos^2\varepsilon+Z^2)\right]}+1}$$

Il est rappelé que les expressions de A_2 , B_2 et Δ en fonction de M(Y,Z) et de μ^2 sont définies par (2-4-6).

Si l'on rapporte cette courbe aux coordonnées (ρ,α) définies comme précédemment par : $Y = Z.\mathrm{otg}\alpha$ et $Z = \rho\sin\alpha$,l'équation (5-5-13) s'écrit sous une forme un peu plus maniable :

(5-5-15) $$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{otg}\theta_s+\sin\varepsilon\cos\alpha}{\cos\varepsilon} + \frac{2(M^2+1)\times\Delta\times\left[\mu^2M^2+\right.}{+(1-\mu^2)\left[1+\mathrm{otg}^2\theta_s-\sin^2\varepsilon\mathrm{otg}^2\theta_s\cos^2\alpha\right]}^2 \times \left[1+\mathrm{otg}^2\theta_s-\right.$$
$$\left.-\sin^2\varepsilon.\mathrm{otg}^2\theta_s.\cos^2\right]$$
$$M^2\mathrm{otg}\theta_s.\cos\varepsilon\left((M^2+1)A_2\left[(\cos^4\varepsilon+2\cos^2\varepsilon-4\cos\varepsilon+1).\mathrm{otg}^2\theta_s.\cos^4\alpha+\right.\right.$$
$$+\left[\sin^2\varepsilon-(\cos^4\varepsilon+2\cos^2\varepsilon-4\cos\varepsilon+1).\mathrm{otg}^2\theta_s\right]\cos^2$$
$$\left.+\cos^2\varepsilon(1+\mathrm{otg}^2\theta)\right.$$
$$\left.+B_2(\cos^4\varepsilon-2\cos\varepsilon+1).\mathrm{otg}^2\theta_s.(\cos^4\alpha-\cos^2\alpha)\right)$$

La valeur du nombre de Mach normal est alors :

(5-5-16) $$M = \frac{\mathcal{M}}{2(1-\mu^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{otg}^2\theta_s-\sin^2\varepsilon.\mathrm{otg}^2\theta_s.\cos^2\alpha}} + \sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{4(1-\mu^2)^2\left[1+\mathrm{otg}^2\theta_s-\sin^2\varepsilon.\mathrm{otg}^2\theta_s.\cos^2\alpha\right]}+1}$$

Il est difficile de préciser le domaine de validité de cette approximation.Si l'on suppose l'angle d'attaque ε égal à zéro,l'expression obtenue pour ρ détermine la valeur de $\mathrm{tg}\theta_w^0$ relative aux écoulements de révolution (formule 5-1-1).Si l'angle d'attaque n'est pas nul,la formule (5-5-15) permet d'obtenir plusieurs familles de courbes de choc.Mais avant de lui accorder un crédit quelconque,il est nécessaire de la comparer à des résultats exacts obtenus par la voie numérique.

On ne peut s'adresser aux tables anciennes de Kopal,cet auteur supposant que le cône de choc relatif à un cône incliné est de révolution.Mais des calculs numériques fort nombreux ont été publiés récemment (1964) par Babenko,Voskresenskij,Ljubimov et Rusanov.D'après ces auteurs les courbes de choc que l'on peut obtenir se partagent en plusieurs familles.Cependant on peut classer leurs formes en deux groupes : le premier qui est le plus répandu,pour lequel la distance de l'obstacle au choc pour $\alpha = 180^\circ$ est plus élevée que celle pour $\alpha = 0^\circ$ et le second pour lequel le phénomène inverse se produit (la valeur $\alpha = 0^\circ$ correspond à la génératrice située sous le vent).L'examen de la formule (5-5-15) montre que cette approximation

appartient au premier groupe.La figure 9 est relative à un cône soumis à un angle d'attaque donné pour différentes valeurs du nombre de Mach amont.

Ces auteurs signalent aussi que la distance de l'obstacle au choc peut ne pas dépendre,dans une large mesure,de l'angle d'attaque.Ce phénomène intervient pour des cônes de faible ouverture et pour les valeurs du nombre de Mach considérées par ces auteurs.La propriété corrélative pour des cônes de grande ouverture et de très grandes valeurs du nombre de Mach se retrouve dans l'approximation précédente.On a illustré ce résultat sur la figure 10 relative à un cône donné animé de vitesse constante et soumis à différentes valeurs de l'angle d'attaque.

Chapitre VI

- Grandeurs caractéristiques de l'écoulement à la surface de l'obstacle -

L'objet du chapitre est l'application des méthodes précédentes à la recherche des grandeurs caractérisant l'écoulement à la surface de l'obstacle et en particulier à l'approximation rationnelle de la pression et de la température. Comme au second chapitre il est nécessaire au préalable de calculer à l'instant initial les dérivées premières et secondes des grandeurs scalaires P et R qui dépendent de $F'_t(0), F''_{t^2}(0)$ et aussi $F'''_{t^3}(0)$.

1) Valeurs initiales de $\frac{\partial P}{\partial \vec{r}}$ et $\frac{\partial P}{\partial \vec{s}}$.

On se rapportera à certaines équations du second chapitre. Les matrices $\frac{\partial P}{\partial \vec{r}}$ et $\frac{\partial P}{\partial \vec{s}}$ apparaissent dans l'équation (2-4-1), l'équation (2-4-2) et le système (2-4-3) dans lequel la première équation seulement doit être modifiée si l'on considère des mouvements (R). On obtient ainsi le système suivant :

$$
(6\text{-}1\text{-}1)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial A}{\partial \vec{r}}\vec{V} + A'_t + \bar{o}^{-2}\,\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\,R\,\dfrac{\partial P}{\partial \vec{r}}\vec{N}_f = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial A}{\partial \vec{s}} = (1-\mu^2)U.|H'| + (1-\mu^2).H.\begin{vmatrix} f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt} \\ A \\ B \end{vmatrix} - A_x.|F'| \\[2ex]
\dfrac{\partial P}{\partial \vec{r}}\vec{V} + \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{1+\mu^2}{1-\mu^2}\,P.\mathrm{Tr}\left(\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}\right) + n\,\dfrac{1+\mu^2}{1-\mu^2}\,\dfrac{V}{y}\,P = 0 \\[2ex]
P'_x|F'| + \dfrac{\partial P}{\partial \vec{s}} = \dfrac{2(1-\mu^2)}{\bar{o}^2}.\dfrac{1}{U}.|F'|'_t - \dfrac{2(1+\mu^2)}{\bar{o}^2}.\dfrac{(F'_t)^2}{U^2}\begin{vmatrix} f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt} \\ A \\ B \end{vmatrix}
\end{cases}
$$

dans lequel n = 0 pour les mouvements (E).
Pour les mouvements (R) on choisit n = 1 et on écrit seulement les variables y et z dans toutes les équations.

On sait que $\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} = \overrightarrow{\overrightarrow{N_f}}.\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}$ et $\frac{\partial A}{\partial \vec{s}} = \overrightarrow{\overrightarrow{N_f}}.\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}$. Par conséquent ce système déterminera les valeurs initiales de $\frac{\partial P}{\partial \vec{r}}$, $\frac{\partial P}{\partial \vec{s}}$, $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}$ et $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{s}}$ en fonction de $|F'|$ et $|F'|'_t$.

Ces dernières matrices étant déjà connues en fonction des éléments initiaux de l'écoulement,le système (6-1-1) résoud donc le calcul des grandeurs chorchées.

Il ne sera utilisé dans la suite que les coefficients P'_x et P'_t mais le calcul des autres dérivées se présente de la même façon.Comme au second chapitre on peut d'abord exprimer P'_x et P'_t en fonction de $|F'|'_t$ dont le premier élément seul a une expression assez compliquée.On obtient ainsi :

Ecoulements (E) :

$$
\left\{
\begin{aligned}
[P_x(y,z,\bullet)]_{(E)} &= \frac{1+\mu^2}{\bar{o}^2}\ \frac{2\mu^2M^4+2(1-\mu^2)M^2+[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2+1)}{(1-M^2)M^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)}\cdot\frac{F''^2_t(yz\bullet)}{U} \\
&+\frac{(1+\mu^2)}{(1-M^2)(M^2+1)M^4[\mu^2M^2+1-\mu^2]}\cdot\left[\begin{aligned}
&2M^4(\mu^2M^2+1-\mu^2)[(1-\mu^2)(M^2-1)^2-2M^2]\ + \\
&+2M^2(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](\mu^2M^2+1-\mu^2)+ \\
&+2[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2+1)[(1-\mu^2)(M^2-1)^2(M^2+1)-2M^4]- \\
&-[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]M^2(M^2-1)[(1-\mu^2)M^4+M^2+\mu^2-1]
\end{aligned}\right]\cdot\frac{\Omega}{U^2} \\
&-(1+\mu^2)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\cdot\frac{2\Omega - U(f''^2_y+f''^2_z)}{U^2}
\end{aligned}
\right. \qquad (6\text{-}1\text{-}2)
$$

et de la même façon :

$$
\left\{
\begin{aligned}
[P_t(y,z,\bullet)]_{(E)} &= \frac{1+\mu^2}{\bar{o}}\cdot\frac{2(1-M^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)M^2-2(1-\mu^2)M^2-2\mu^2M^4-[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2+1)}{(1-M^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)M}\cdot\frac{F''^2_t(yz\bullet)}{\sqrt{U}} \\
&-\frac{\bar{o}(1+\mu^2)}{(1-M^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2+1)^2M^3}\cdot\left[\begin{aligned}
&4M^6(1-M^2)(\mu^2M^2+1-\mu^2)+ \\
&+2M^4(\mu^2M^2+1-\mu^2)[(1-\mu^2)(M^2-1)^2-2M^2]+ \\
&+2M^2(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](\mu^2M^2+1-\mu^2)+ \\
&+2[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2+1)[(1-\mu^2)(M^2-1)^2(M^2+1)-2M^4] \\
&-[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]M^2(M^2-1)[(1-\mu^2)M^4+M^2+\mu^2-1]
\end{aligned}\right]\cdot\frac{\Omega}{U\sqrt{U}} \\
&+(1+\mu^2)\bar{o}\,M[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\cdot\frac{2\Omega - U(f''^2_y+f''^2_z)}{U\sqrt{U}}
\end{aligned}
\right. \qquad (6\text{-}1\text{-}3)
$$

Ecoulements (R) :

Si on introduit les grandeurs $[P_x]_{(P)}$ et $[P_t]_{(P)}$ qui résultant immédiatement des formules précédentes, on obtient de la même façon :

$$(6\text{-}1\text{-}4)\quad \begin{cases} [P_x(y,\bullet)]_{(R)} = [P_x]_{(P)} + (1+\mu^2)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\dfrac{f'}{U}\cdot\dfrac{1}{y} \\ [P_t(y,\bullet)]_{(R)} = [P_t]_{(P)} - (1+\mu^2)\bar{o}\,M[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\dfrac{f'}{\sqrt{U}}\cdot\dfrac{1}{y} \end{cases}$$

On retrouve loin de l'axe de révolution les valeurs relatives aux écoulements (P).

2) Détermination de $P''_{xt}(0)$ et $P''_{t^2}(0)$

A partir des équations du paragraphe 3 du chapitre II il est possible par dérivation d'abord puis en se plaçant à l'instant t = 0 de déterminer les valeurs initiales de $\dfrac{\partial^2 P}{\partial \vec{r}^2}$ et $\dfrac{\partial^2 P}{\partial \vec{s}^2}$ en fonction des matrices connues $|F'|$ et leurs dérivées premières et secondes.

Mais comme pour le calcul de $\dfrac{\partial P}{\partial \vec{r}}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial \vec{s}}$ on n'utilisera dans la suite que P''_{xt} et P''_{t^2}. De la seconde équation matricielle (2-3-4) on déduit d'abord l'équation :

$$(6\text{-}2\text{-}1)\quad F'_t\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x=F(yzt)} + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{x=F(yzt)} = \frac{1+\mu^2}{\bar{o}^2}K'_t$$

De l'expression de K'_t fournie par (2-3-2), il résulte que cette expression est indépendante de x. Par suite si l'on dérive (6-2-1) par rapport à t puis par rapport à x, par élimination de P''_{x^2} entre les deux équations obtenues on obtiendra :

$$(6\text{-}2\text{-}2)\quad P''_{t^2} + P''_{xt}F'_t + P'_x \cdot F''_{t^2} = \frac{1+\mu^2}{\bar{o}^2}\cdot K''_{t^2}$$

valable quel que soit t et sur la surface du choc seulement.

A l'instant t = 0 de la matrice (2-3-2) on déduit l'expression de $K''_{t^2}(0)$ en fonction des dérivées initiales de F(yzt) :

$$(6\text{-}2\text{-}3)\quad \begin{cases} K''_{t^2}(0) = 2\bar{o}\,\dfrac{M}{\sqrt{U}}\cdot F'''_{t^3} + 2\,\dfrac{(F''_{t^2})^2}{U} - 16\bar{o}^2\,\dfrac{M^2}{M^2+1}\,\dfrac{\Omega}{U^2}\cdot F''_{t^2} - \\ - \dfrac{16\bar{o}^4M^4}{(M^2+1)^2}\cdot\dfrac{A^2+B^2}{U^2} + 32\bar{o}^4\dfrac{M^4}{(M^2+1)^2}\cdot\dfrac{\Omega^2}{U^4} - 2\bar{o}^2\dfrac{M^2}{U}\left(f'_y F'''_{yt^2} + f'_z F'''_{zt^2}\right) \end{cases}$$

Si l'on dérive d'autre part la seconde équation (2-3-4) par rapport au temps on obtient :

$$(6\text{-}2\text{-}4)\qquad P''_{xt}\cdot|F'|+P'_x|F'|'_t+\frac{\partial^2 P}{\partial\vec{s}\,\partial t}=\frac{1+\mu^2}{\bar{o}^2}\cdot|K'|'_t$$

On en déduit l'équation scalaire :

$$(6\text{-}2\text{-}5)\qquad f'_y P''_{yt}+f'_z P''_{zt}=\frac{1+\mu^2}{\bar{o}^2}\left(f'_y K''_{yt}+f'_z K''_{zt}\right)-P''_{xt}\left(f'_y F'_y+f'_z F'_z\right)-P_x\left(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt}\right)$$

De la première équation du système (6-1-1) on en déduit l'équation suivante par la même dérivation :

$$(6\text{-}2\text{-}6)\qquad \begin{cases} u'_t A'_x+uA''_{xt}+v'_t A'_y+w'_t A'_z+A''_{t^2}+v\,A''_{yt}+w\,A''_{zt}+u'_x F'_t A'_x+ \\ +\bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}R'_t(P_x-P_y f'_y-P_z f'_z)+\bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}R.P''_{xt}-\bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}R(f'_y P''_{yt}+f'_z P''_{zt})+ \\ +\bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}R'_x F'_t(P_x-P_y f'_y-P_z f'_z)=0 \end{cases}$$

L'élimination possible de P''_{yt} et P''_{zt} entre les deux dernières équations conduit à une équation ne contenant plus que P''_{xt} et qui s'écrit :

$$(6\text{-}2\text{-}7)\qquad \begin{cases} \bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}R(1+F'_y f'_y+F'_z f'_z).P''_{xt}=(1-\mu^2)R(f'_y K''_{yt}+f'_z K''_{zt})+ \\ +\bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}(P_y f'_y+P_z f'_z)R'_t-\bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}R'_t P'_x-\bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}R(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt})P'_x \\ +\bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}R'_x F'_t(P_y f'_y+P_z f'_z)-\bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}R'_x F'_t P'_x-u'_t A'_x-u\,A''_{xt}- \\ -v'_t A'_y-w'_t A'_z-A''_{t^2}-v\,A''_{yt}-w\,A''_{zt}-u'_x F'_t A'_x \end{cases}$$

D'autre part à l'instant t = 0 les équations (2-5-3),(2-5-4),(2-4-2) et (2-7-8) permettent d'écrire :

$$(6\text{-}2\text{-}8)\qquad \begin{cases} A''_{tx}=A''_{ty}=A''_{tz}=0 \qquad A''_{t^2}=\xi'''_{t^3}-\xi''_{t^2}A'_x \\ A'_y=-(1-\mu^2)\bar{o}\dfrac{M^2-1}{M}\cdot\dfrac{A}{\sqrt{U}}-f'_y A'_x \qquad A'_z=-(1-\mu^2)\bar{o}\dfrac{M^2-1}{M}\dfrac{B}{\sqrt{U}}-f'_z A'_x \end{cases}$$

Des équations (2-3-3) et (2-3-4) considérées à l'instant t = 0 on déduit les valeurs suivantes :

$$
\left\{
\begin{aligned}
& P'_y f'_y + P'_z f'_z = 2(1+\mu^2)M^2 \frac{1-M^2}{1+M^2}\frac{\Omega}{U} - P_x(f'^2_y + f'^2_z) \\
& u'_t = (1-\mu^2)\frac{M^2+1}{M^2}\cdot\frac{F''^2_t}{U} - 4\bar{o}^2\frac{M^2}{M^2+1}\cdot\frac{\Omega}{U^2} - u'F'_t \\
& v'_t = -(1-\mu^2)\frac{M^2+1}{M^2}\cdot\frac{F''^2_t}{U} f'_y + 4(1-\mu^2)\bar{o}^2\frac{M^2}{M^2+1} f'_y\frac{\Omega}{U^2} - (1-\mu^2)\bar{o}\frac{M^2+1}{M}\cdot\frac{F''_{yt}}{\sqrt{U}} \\
& w'_t = -(1-\mu^2)\frac{M^2+1}{M^2}\cdot\frac{F''^2_t}{U} f'_z + 4(1-\mu^2)\bar{o}^2\frac{M^2}{M^2+1} f'_z\frac{\Omega}{U^2} - (1-\mu^2)\bar{o}\frac{M^2+1}{M}\frac{F''_{zt}}{\sqrt{U}}
\end{aligned}
\right. \qquad (6\text{-}2\text{-}9)
$$

En utilisant (2-3-2) on calcule de même l'expression suivante :

$$
\left\{
\begin{aligned}
& K''_{yt} f'_y + K''_{zt} f'_z = \frac{2\bar{o}M}{\sqrt{U}}(f'_y F''_{yt^2} + f'_z F''_{zt^2}) + \frac{8\bar{o}^3M^3}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{A^2 f'_y + B^2 f'_z}{U\sqrt{U}} + \frac{16\bar{o}^3}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{\Omega^2}{U^2\sqrt{U}} \\
& - \frac{4\bar{o}M\Omega}{U\sqrt{U}} F''^2_t - \frac{2\bar{o}^2M^2}{U}[f'^2_y F''^2_{yt} + f'^2_z F''^2_{zt} + 2f'_y f'_z F''_{yzt} + A F''_{yt} + B F''_{zt}]
\end{aligned}
\right. \qquad (6\text{-}2\text{-}10)
$$

La définition (2-1-2) de J et la matrice (2-3-2) donnant $|K'|$ permettent de calculer pour t = 0 :

$$
\left\{
\begin{aligned}
& J'_y = \frac{2A}{F'^2_t} - 2\frac{U}{F'^3_t}(F''_{ty}) \qquad\qquad J'_z = \frac{2B}{F'^2_t} - 2\frac{U}{F'^3_t}(F''_{tz}) \\
& J'_t = \frac{2}{F'^2_t}(f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt}) - \frac{2U}{F'^3_t}(F''^2_t)
\end{aligned}
\right. \qquad (6\text{-}2\text{-}11)
$$

D'autre part dans l'équation (6-2-7) intervient R'_x dont l'expression résultant de (2-3-5) pour t = 0 s'écrit :

$$
R'_x = \frac{2(1-\mu^2)\bar{o}^2}{F'^3_t}(f'_y F''_{yt} + f'_z F''_{zt}) - 2(1-\mu^2)\bar{o}^2\frac{U}{F'^4_t}\cdot F''^2_t - \frac{R'_t}{F'_t} \qquad (6\text{-}2\text{-}12)
$$

Dans ces conditions on peut écrire avec les valeurs précédentes l'équation (6-2-7) à l'instant initial en fonction des dérivées de F, de f, de A_x, de P_x, et du mouvement de l'obstacle sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
&\bar{o}^2\,\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}P''_{xt}(0) = 2\bar{o}(1-\mu^2)M\,\frac{f'_y F'''_{yt^2}+f'_z F'''_{zt^2}}{U\sqrt{U}} + 8\bar{o}^3(1-\mu^2)\frac{M^2}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{A^2 f'_y + B^2 f'_z}{U^2\sqrt{U}} + \\
&+\frac{16(1-\mu^2)\bar{o}^3}{(M^2+1)^2}\,\frac{\Omega^2}{U^3\sqrt{U}} - \frac{4(1-\mu^2)\bar{o}M}{U^2\sqrt{U}}\,\Omega\,F''_{t^2} - \bar{o}^2\,\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\,\frac{f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt}}{U}\,P'_x - \frac{\xi'''_{t^3}}{R\,U} + \\
&+\frac{\xi''_{t^2}}{RU}\,A'_x - (1-\mu^2)\,\frac{M^2+1}{RM^2}\,\frac{F''_{t^2}\cdot A'_x}{U} + 4\bar{o}^2\,\frac{M^2}{R(M^2+1)}\,\frac{\Omega}{U^2}\,A'_x + \frac{2(1-\mu^2)^2\bar{o}^4}{1+\mu^2}\cdot\frac{F''_{t^2}P_x}{R\,F'_{t^3}}\cdot U - \\
&-2\bar{o}^4\,\frac{(1-\mu^2)^2}{1+\mu^2}\,\frac{f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt}}{R}\cdot\frac{P'_x}{F'^2_t} + 4(1-\mu^2)^2\bar{o}^4\,\frac{M^2(1-M^2)}{R(1+M^2)}\cdot\frac{f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt}}{U^2}\cdot\frac{\Omega}{F'_t} - \\
&-4(1-\mu^2)^2\bar{o}^4\,\frac{M^2(1-M^2)}{R(1+M^2)}\,\frac{F''_{t^2}}{F'^3_t}\,\Omega - (1-\mu^2)^2\bar{o}\,\frac{M^4-1}{RM^3}\cdot F''_{t^2}\cdot\frac{Af'_y+Bf''_z}{U^2\sqrt{U}} + \\
&+4(1-\mu^2)^2\bar{o}^3\,\frac{M(M^2-1)}{R(M^2+1)}\,\frac{\Omega}{U^3\sqrt{U}}(Af'_y+Bf'_z) - (1-\mu^2)\bar{o}\,\frac{M^2+1}{RM}\,\frac{A'_x}{U\sqrt{U}}\,(f'_y F''_{yt}+f'_z F''_{zt}) - \\
&-(1-\mu^2)^2\bar{o}^2\cdot\frac{M^4-1}{RM^3}\cdot\frac{A\,F''_{yt}+B\,F''_{zt}}{U^2} - \\
&-2\bar{o}^2(1-\mu^2)\frac{M^2}{U^2}[f'^2_y F'''_{y^2t}+f'_z F'''_{z^2t}+2f'_y f'_z F'''_{yzt}+A\,F''_{yt}+B\,F''_{zt}]
\end{aligned}
\tag{6-2-3}
$$

De même on en déduira par (6-2-2) et (6-2-3) la valeur suivante :

$$
\begin{aligned}
&P''_{t^2}(0) = \frac{2(1+\mu^2)}{\bar{o}}M\,\frac{F'''_{t^3}}{\sqrt{U}} + \frac{2(1+\mu^2)}{\bar{o}^2}\,\frac{(F''_{t^2})^2}{U} - \frac{16(1+\mu^2)M^2}{M^2+1}\cdot\frac{\Omega}{U^2}\cdot F''_{t^2} - \\
&-\frac{16\bar{o}^2(1+\mu^2)M^4}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{A^2+B^2}{U^2} + 32\bar{o}^2(1+\mu^2)\frac{M^4}{(M^2+1)^2}\cdot\frac{\Omega^2}{U^4} - \frac{2(1+\mu^2)}{U}(f'_y F'''_{yt^2}+f'_z F'''_{zt^2})M^2 - \\
&-P_x F''_{t^2} - F'_t P''_{xt}(0)
\end{aligned}
\tag{6-2-14}
$$

Ces deux équations sont donc valables quel que soit le nombre de variables utilisé mais les expressions finales dépendront des mouvements considérés en vertu des valeurs des dérivées de la fonction F et de A'_x.

On peut toutefois donner les expressions de $[P''_{xt}(0)]_R$ et $[P''_{t^2}(0)]_R$ en fonction des quantités analogues relatives aux mouvements plans et déterminées par les deux équations précédentes. On écrira d'abord :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
[F''_{t^2}(y,0)]_{(R)} = [F''_{t^2}(y,0)]_{(P)} - \bar{o}^2 \dfrac{A_z}{\Delta}\dfrac{f'}{y} & \text{par (2-4-8)} \\[2ex]
[F'''_{t^3}(y,0)]_{(R)} = [F'''_{t^3}(y,0)]_{(P)} + K(y,M,\mu^2) & \text{par (2-8-5)} \\[2ex]
[A'_x(y,0)]_{(R)} = [A'_x(y,0)]_{(P)} - (1-\mu^2)\bar{o}\dfrac{M^2+1}{RM^3}\dfrac{A_z}{\Delta}\dfrac{f'}{y\sqrt{U}} & \text{par (2-4-8)} \\[2ex]
[F'''_{yt^2}(y,0)]_{(R)} = [F'''_{yt^2}(y,0)]_{(P)} + H(y,M,\mu^2) & \text{par (2-7-17)} \\[2ex]
[P_x(y,0)]_{(R)} = [P_x(y,0)]_{(P)} + (1+\mu^2)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\dfrac{f'}{U\,y} & \text{par (6-1-4)}
\end{array}
\right. \qquad (6\text{-}2\text{-}15)
$$

les autres expressions qui interviennent dans le calcul étant indépendantes du nombre de variables utilisées.

Dans ces conditions en introduisant les valeurs des dérivées : $[F''_{t^2}]_{(P)}$ $[F'''_{t^3}]_P$ $[P'_x]_P$ ainsi que $[A'_x]_P$ et $[P''_{xt}]_{(P)}$ on pourra écrire l'analogue de la formule (6-2-13) relative aux mouvements de révolution sous la forme suivante :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}[P''_{xt}(y,0)]_{(R)} = \bar{o}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}[P''_{xt}(y,0)]_{(P)} + 2\bar{o}\,(1-\mu^2)\dfrac{M\,f'(H)}{(1+f'^2)\sqrt{1+f'^2}} \\[2ex]
+4(1-\mu^2)\bar{o}^3\dfrac{MA_z}{\Delta}\cdot\dfrac{f'^3 f''}{y}\cdot\dfrac{1}{(1+f'^2)^2\sqrt{1+f'^2}} - (1-\mu^2)\bar{o}^2[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\cdot F''_{yt}\cdot\dfrac{f'^2}{y(1+f'^2)^2} \\[2ex]
-2(1-\mu^2)^2\bar{o}^4\dfrac{(1+\mu^2)M^2-\mu^2}{R\,F'^2_t}\cdot F''_{yt}\cdot\dfrac{f'^2}{y(1+f'^2)} - (1-\mu^2)\bar{o}\dfrac{(M^2+1)A_z}{R^2M^3\Delta}\cdot\dfrac{f'}{y(1+f'^2)\sqrt{1+f'^2}}\,\xi''_{t^2}\cdots
\end{array}
\right. \qquad (6\text{-}2\text{-}16)
$$

(6-2-16)

$$
\begin{aligned}
&\cdots+4(1-\mu^2)^{2-6}_{o}\,\frac{M^2(1-M^2)A_2}{R(1+M^2)\Delta}\cdot\frac{1}{F'^3_t}\cdot\frac{f'^3f''}{y(1+f'^2)}+(1-\mu^2)^{-3}_{o}\,\frac{(M^4-1)A_2}{RM^3\Delta}\cdot\frac{f'^3f''}{(1+f'^2)^2\sqrt{1+f'^2}}\cdot\frac{1}{y}\\
&+(1-\mu^2)^{2-2}_{o}\,\frac{(M^2+1)^2A_2}{R^2M^4\Delta}\cdot F''_{yt}\cdot\frac{f'^2}{(1+f'^2)^2y}-4(1-\mu^2)^{2-3}_{o}\cdot\frac{A_2}{R^2M\Delta}\cdot\frac{f'^3f''}{(1+f'^2)^2\sqrt{1+f'^2}}\cdot\frac{1}{y}-\\
&-(1-\mu^2)^{2-3}_{o}\,\frac{(M^2+1)^2(A_2)^2}{R^2M^5\Delta^2}\cdot\frac{f'^2}{y^2}\cdot\frac{1}{(1+f'^2)\sqrt{1+f'^2}}+(1-\mu^2)^{-2}_{o}\,\frac{(M^2+1)A_2}{RM^3\Delta}\cdot\frac{f'}{y}\cdot[A_x](P)+\\
&+(1-\mu^2)^{2-}_{o}\cdot\frac{(M^2+1)^2A_2}{R^2M^5\Delta}\cdot\frac{f'}{y(1+f'^2)\sqrt{1+f'^2}}[F''_{t^2}](P)-\frac{2(1-\mu^2)^{2-6}_{o}A_2}{1+\mu^2}\cdot\frac{Uf'}{F'^3_tR\Delta}\cdot\frac{[P'_x]}{y}(P)+\\
&+2(1-\mu^2)^2\,\frac{\bar{o}^4}{F'^3_tR}[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\frac{f'}{y}[F''_{t^2}](P)-2(1-\mu^2)^{2-6}_{o}\,\frac{A_2[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]}{\Delta\,R\,F'^3_t}\cdot\frac{f'^2}{y^2}
\end{aligned}
$$

De la même façon l'analogue de la formule (6-2-14) s'écrira :

(6-2-17)

$$
\begin{aligned}
&[P''_{t^2}(y,0)]_{(R)}=[P''_{t^2}(y,0)]_{(P)}+\frac{2(1+\mu^2)}{\bar{o}}\cdot\frac{M}{\sqrt{1+f'^2}}\cdot K(y,M,\mu^2)-\\
&-\frac{2(1+\mu^2)}{1+f'^2}\,f'\cdot H(y,M,\mu^2)-\bar{o}M\cdot\sqrt{1+f'^2}\cdot R(y,M,\mu^2)-\\
&-\frac{1+\mu^2}{\Delta}\Big\{4A_2+[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\Delta\Big\}\frac{f'}{y(1+f'^2)}[F''_{t^2}(y,0)]_{(P)}+\bar{o}^2\,\frac{A_2}{\Delta}\cdot\frac{f'}{y}[P'_x(y,0)]_{(P)}\\
&+\frac{16(1+\mu^2)\bar{o}^2M^2A_2}{(M^2+1)\Delta}\cdot\frac{f'^3f''}{(1+f'^2)^2}\,\frac{1}{y}+(1+\mu^2)\bar{o}^2\cdot\frac{A_2}{\Delta^2}\Big\{2A_2+[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\Delta\Big\}\,\frac{f'^2}{y^2(1+f'^2)}
\end{aligned}
$$

en posant pour simplifier ! :

(6-2-18)
$$[P''_{xt}(y,0)]_{(R)}=[P''_{xt}(y,0)]_{P}+R(y,M,\mu^2)$$

3) Détermination de la pression sur l'obstacle

Lorsque l'écoulement est de révolution, l'axe de symétrie est une ligne de courant. Le choc étant normal au point d'arrêt, la valeur de la pression en ce point est connue exactement. Son expression, à partir des équations des chocs, s'écrit :

$$(6\text{-}3\text{-}1) \qquad \left[\frac{p_{st}}{\bar{p}}\right]_{(R)} = (1+\mu^2)-M^2-\mu^2$$

p_{st} désignant la pression au sommet, et $\bar{p}$ la pression dans le fluide au repos et M étant la valeur initiale du nombre de Mach normal lorsqu'on se place en ce point.

La situation n'est plus la même en écoulement (P) ou (E) et la valeur de la pression au sommet de l'obstacle ne peut être calculée exactement. D'après les théorèmes d'existence, dans le problème du départ de l'obstacle, il est clair que toute grandeur A(x,y,z,t) attachée à l'écoulement admet à partir de la valeur t = 0 un développement de la forme :

$$(6\text{-}3\text{-}2) \qquad A(x,y,z,t) = \sum_{0}^{\infty} t^n \left[\frac{d^n A(x,y,z,t)}{dt^n}\right]_{t=0}$$

Le calcul des coefficients de ce développement n'est possible, comme on l'a vu, que pour la valeur $x = f(y,z) = F(y,z,0)$ c'est-à-dire si l'on se place à la surface de l'obstacle. Par application de la méthode des séries tronquées on a ainsi déterminé en particulier la distance des sommets : $h = \lim_{t\to\infty} h[x,y,z,t]$ relative aux écoulements stationnaires avec chocs détachés. La comparaison des formules obtenues avec les résultats numériques exacts permet d'espérer que l'on peut opérer de même en ce qui concerne la pression.

D'après les calculs des paragraphes précédents on ne dispose que des dérivées secondes de P et par conséquent la seule transformation possible relative à (6-3-2) que l'on peut écrire ici sera la transformation du premier ordre de Padé qui conduira à :

$$(6\text{-}3\text{-}3) \qquad A = A_o - 2\,\frac{(A'_x\xi'_t + A'_t)^2}{A''_{x^2}\xi'^2_t + 2\,A''_{xt}\xi'_t + A''_{t^2}}$$

A_o désignant la valeur initiale définie par les équations du choc (2-2-5). Lorsque A désigne la pression rapportée à la pression dans le fluide au repos, si l'on dérivé (6-2-1) on obtient :

$$(6\text{-}3\text{-}4) \qquad \bar{\rho}_o M \sqrt{U_o}\,P''_{x^2} + P''_{xt} = 0$$

D'autre part, d'après (2-2-3) et (2-2-4) on détermine :

$$\xi_t'(0) = \bar{\sigma}(1-\mu^2)\,\frac{M^2-1}{M}\,\sqrt{U} \tag{6-3-5}$$

Dans ces conditions la formule (6-3-3) appliquée à P donnera en tout point de la surface de l'obstacle, dans le cas des chocs stationnaires détachés, la valeur approchée suivante :

$$P[x,y,z] = P_o - 2\frac{[\bar{\sigma}(1-\mu^2)(M^2-1).P'_x\sqrt{U} + M\,P'_t]^2.M}{\bar{\sigma}(1-\mu^2)(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2+1-\mu^2]P''_{xt}\sqrt{U} + M^3.P''_{t^2}} \tag{6-3-6}$$

dont les coefficients sont connus d'après les paragraphes 1 et 2.
Afin de rester dans des limites raisonnables d'écriture on se limitera à écrire ces expressions en fonction des données, seulement en se plaçant au sommet de l'obstacle.
On obtient d'abord à partir de (6-1-2) et (6-1-3) les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
[P_x(0,0,0)]_{(E)} &= \frac{1+\mu^2}{\bar{\sigma}^2}.\frac{2\mu^2M^4+2(1-\mu^2)M^2+[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2+1)}{(1-M^2)M^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)}.[F''_{t^2}(0)]_{(E)} + \\
&\quad +(1+\mu^2)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](f''_{y^2}+f''_{z^2}) \\
[P_t(0,0,0)]_{(E)} &= \frac{1+\mu^2}{\bar{\sigma}^2}\;\frac{2(\mu^2M^2+1-\mu^2)M^4+(M^2+1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]}{(M^2-1)M(\mu^2M^2+1-\mu^2)}.[F''_{t^2}(0)]_{(E)} - \\
&\quad -(1+\mu^2)\bar{\sigma}\,[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]M(f''_{y^2}+f''_{z^2})
\end{aligned}\right. \tag{6-3-7}$$

De même les équations (6-2-13) et (6-2-14), si l'on se place au sommet et si le mouvement est uniforme, s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned}
[P''_{xt}(0,0,0)]_{(E)} &= \frac{2(1-\mu^2)}{\bar{\sigma}(\mu^2M^2+1-\mu^2)M}.F''_{t^2}.P'_x - \frac{1+\mu^2}{\bar{\sigma}^2}.\frac{M^2+1}{\mu^2M^2+1-\mu^2}.F''_{t^2}.A'_x \\
[P''_{t^2}(0,0,0)]_{(E)} &= \frac{2(1+\mu^2)M}{\bar{\sigma}}F'''_{t^3} + \frac{2(1+\mu^2)}{\bar{\sigma}^2}(F''_{t^2})^2 - P_x.F''_{t^2} - \bar{\sigma}M.P''_{xt}(0,0,0)
\end{aligned}\right. \tag{6-3-8}$$

dans lesquelles les expressions de A'_x F''_{t^2} P_x et F'''_{t^3} sont connues par ailleurs.

La résolution de ce système conduit aux valeurs suivantes :

$$(6\text{-}3\text{-}9)\quad \begin{cases} [P''_{xt}(0,0,0)]_{(E)} = \dfrac{-(1-\mu^4)\bar{\sigma}(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]^2.(\beta)}{M^3[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]^2}.(f''_{y^2}+f''_{z^2})^2 \\ [P''_{t^2}(0,0,0)]_{(E)} = \dfrac{(1+\mu^2)\bar{\sigma}^2(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]^2.(\gamma)}{M^2(M^2+1)[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]^2}.(f''_{y^2}+f''_{z^2})^2 \end{cases}$$

dans lesquelles on a posé les nouveaux coefficients :

$$(6\text{-}3\text{-}10)\quad \begin{cases} (\beta) = M^8+M^6(-6\mu^2-1)+M^4(2\mu^2-5)+M^2(-2\mu^2+5)-2\mu^2 \\ (\gamma) = (1-\mu^2)(M^2+1)(\beta)+2(\mu^2M^2+1-\mu^2)^2M^2(M^4-1)+ \\ \quad +(\mu^2M^2+1-\mu^2)[M^8(-3\mu^2-1)+M^6(6\mu^2-3)+M^4(-4\mu^2+3)+M^2(2\mu^2-1)-\mu^2] \end{cases}$$

Dans le cas des écoulements (R) si $y \to 0$ $\frac{f'}{y} \to f''$ car il s'agit ici d'obstacles à nez arrondi.Par conséquent les formules (6-3-4),au sommet,s'écrivent :

$$(6\text{-}3\text{-}11)\quad \begin{cases} [P_x(0,0)]_{(R)} = [P_x(0,0)]_{(P)}+(1+\mu^2)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]f'' \\ [P_t(0,0)]_{(R)} = [P_t(0,0)]_{(P)}-(1+\mu^2)\bar{\sigma}[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\,f'' \end{cases}$$

Si l'on se place toujours au même point on vérifie que $F''_{yt}=0$ et que dans les expressions (6-2-15) on a : $H(0,M,\mu^2)=0$.Par conséquent la formule (6-2-16) s'écrira :

$$(6\text{-}3\text{-}12)\quad \begin{cases} \bar{\sigma}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}[P''_{xt}(0,0)]_{(R)} = \bar{\sigma}^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}[P''_{xt}(0,0)]_{(P)}-\dfrac{3(1-\mu^2)^2.\bar{\sigma}^3.(\tilde{M}^2+1)^2(A_2)^2}{(\mu^2M^2+1-\mu^2)^2.M.\Delta^2}.f''^2 \\ -2(1-\mu^2)^2\bar{\sigma}^3\dfrac{[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]A_2}{(\mu^2M^2+1-\mu^2)M.\Delta}.f''^2+ \\ +\dfrac{2(1-\mu^2)^2\bar{\sigma}^3(A_2)^2\left[2\mu^2M^4+2(1+\mu^2)M^2+[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2+1)\right]}{(\mu^2M^2+1-\mu^2)^2.M^3.\Delta.(M^2-1)}.f''^2 \end{cases}$$

Toutes réductions faites,on obtient la valeur suivante :

$$(6\text{-}3\text{-}13)\quad [P''_{xt}(0,0)]_{(R)} = [P''_{xt}(0,0)]_{(P)}-\frac{(1-\mu^4)\bar{\sigma}(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]^2(\beta_1)}{M^3[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]^2}.f''^2$$

où l'on a posé :

(6-3-14) $(\beta_1) = 3M^8 + M^6(-18\mu^2-3) + M^4(18\mu^2-19) + M^2(10\mu^2+3) - 2\mu^2$

De même les expressions qui apparaissent dans (6-2-17) et qui conduisent à la valeur de $[P''_{t^2}(0,0)]_{(R)}$ ont pour valeur :

$$\begin{cases} H(0,M,\mu^2) = R(0,M,\mu^2) = 0 \quad ; \quad K(0,M,\mu^2) = \dfrac{\bar{o}^3(G_3+2A_3)}{M(M^2+1)\Delta^2}\,.f''^2 \\ \\ [P_x(0,0)]_{(P)} = \dfrac{(1+\mu^2)[\Delta.M^2-2\mu^2M^4-2(1+\mu^2)M^2-[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2+1)]}{\Delta\, M^2}[(1+\mu^2)M^2-\mu^2].f'' \\ \\ [F''_{t^2}(0,0)]_{(P)} = -\bar{o}^2\,\dfrac{A_2}{\Delta}\,f'' \quad ; \quad [F''_{t^2y}(0,0)]_{(P)} = [F''_{ty}(0,0)]_{(P)} = 0 \end{cases} \tag{6-3-15}$$

Ces expressions permettent alors d'écrire :

$$\begin{cases} [P''_{t^2}(0,0)]_{(R)} = [P''_{t^2}(0,0)]_{(P)} + 2(1+\mu^2)\bar{o}^2\,\dfrac{G_3+2A_3}{(M^2+1)\Delta^2}.f''^2 + \\ + (1+\mu^2)\bar{o}^2\,\dfrac{A_2}{\Delta^2}.\left[A_2+[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\Delta\right]f''^2 + \dfrac{(1+\mu^2)\bar{o}^2A_2}{\Delta^2}\left[2A_2+[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\Delta\right].f''^2 \\ + \dfrac{(1+\mu^2)\bar{o}^2A_2\left[\Delta M^2-2\mu^2M^4-2(1+\mu^2)M^2-[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](M^2+1)\right]}{M^2.\Delta^2}\,f''^2 \end{cases} \tag{6-3-16}$$

qui, toutes réductions faites, conduit à l'expression suivante :

$$[P''_{t^2}(0,0)]_{(R)} = [P''_{t^2}(0,0)]_{(P)} + \frac{(1+\mu^2)\bar{o}^2(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]^2.(\mu^2M^2+1-\mu^2).(\gamma_2)}{M^2(M^2+1)[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]^2}.f''^2 \tag{6-3-17}$$

où l'on a posé le nouveau coefficient suivant :

$$(\gamma_1) = M^8(-5\mu^2-3)+M^6(-4\mu^2-1)+M^4(22\mu^2-5)+M^2(-16\mu^2+5)+11\mu^2-12 \tag{6-3-18}$$

Tous les coefficients intervenant dans la formule (6-3-6) considérée au sommet de l'obstacle sont alors connus en fonction des données du problème.

- Ecoulements (R) :

Bien que le calcul soit inutile, la valeur de la pression au point d'arrêt étant déterminée exactement par la relation de Bernouilli considérée sur l'axe de révolution, déterminons cette valeur par application de la formule approchée (6-3-6).

On peut calculer d'abord par (6-3-11) en utilisant (6-3-5),(6-3-7) et (2-4-5) la quantité suivante :

$$(6\text{-}3\text{-}19)\quad \left\{\begin{array}{l} [\bar{\sigma}(1-\mu^2)(M^2-1).P'_x(0,0)+M.P'_t(0,0)]_{(R)}= \\ = \dfrac{(1+\mu^2)\bar{\sigma}[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]}{[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]M^2}.\left[-M^2(\mu^2M^2+1-\mu^2)[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]\right].f'' \end{array}\right.$$

De même les formules (6-3-9) (6-3-13) et (6-3-17) permettent d'écrire :

$$(6\text{-}3\text{-}20)\quad \left\{\begin{array}{l} [\bar{\sigma}(1-\mu^2)(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2+1-\mu^2].P''_{xt}(0,0)+M^3.P''_{t^2}(0,0)]_{(R)}= \\ = \dfrac{(1+\mu^2)\bar{\sigma}^2[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]^2(M^2-1)}{M^3(M^2+1)[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]^2}\left\{\begin{array}{l} M^4[(\gamma)+(\mu^2M^2+1-\mu^2)M^4(\gamma_1)]- \\ -(1-\mu^2)^2(M^4-1)[(1+\mu^2)M^2+(1-\mu^2)](\beta+\beta_1)\end{array}\right\}.f''^2 \end{array}\right.$$

On a posé le nouveau coefficient :

$$(6\text{-}3\text{-}21)\quad (\alpha)=(-3\mu^4+\mu^2)M^8+(8\mu^4-8\mu^2+1)M^6+(-6\mu^4+12\mu^2-4)M^4+(-4\mu^2+3)M^2-\mu^2(1-\mu^2)$$

Dans ces conditions si l'on considère la valeur de P_o fournie par les équations du choc la valeur approchée de la pression au point d'arrêt sera :

$$(6\text{-}3\text{-}22)\quad \left[\frac{p_s}{p}\right]_{(R)}=(1+\mu^2)M^2-\mu^2+\frac{2(1+\mu^2)(M^2+1)\left\{\alpha-[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]M^2.[\mu M^2+1-\mu^2]\right\}^2}{(M^2-1)\left[\begin{array}{l}(1-\mu^2)^2(M^4-1)[(1+\mu^2)M^2+1-\mu^2](\beta+\beta_1)- \\ -M^4[\gamma+(\mu^2M^2+1-\mu^2)\gamma_1]\end{array}\right]}$$

La valeur du nombre de Mach normal en ce point ayant la valeur connue :

$$(6\text{-}3\text{-}23)\quad M(0,0)=\frac{\mathcal{M}}{2(1-\mu^2)}+\sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{4(1-\mu^2)^2}+1}$$

Le tableau suivant établi pour diverses valeurs du nombre de Mach amont $\mathcal{M}$, est relatif aux fluides mono,di et triatomiques.Il permet de comparer la valeur exacte de la pression au point d'arrêt définie par (6-3-1) et la valeur approchée définie par (6-3-22).

$\mathcal{M}$	Monoatomique : $\mu^2=0$		Diatomique : $\mu^2=\frac{1}{6}$		Triatomique : $\mu^2=\frac{1}{4}$	
	p_{st}/p_{exact}	(6-3-22)	p_{st}/p_{exact}	(6-3-22)	p_{st}/p_{exact}	(6-3-22)
1	2,618	11,628	3,472	12,875	4,114	15,010
2	5,828	7,032	8,733	11,392	10,999	15,946
3	10,908	11,934	17,208	20,350	22,180	27,154
4	17,944	18,949	28,999	31,154	37,764	43,732
5	26,962	27,963	44,135	46,290	57,778	65,259
6	37,973	38,973	62,624	65,227	82,231	91,647
10	101,990	102,990	170,158	174,516	224,465	225,425
15	226,995	227,995	380,162	388,040	502,246	545,904
20	401,997	402,997	674,164	686,988	891,136	970,283
25	626,998	627,998	1052,165	1071,352	1391,137	1512,098
30	901,998	902,998	1514,165	1541,131	2002,249	2168,617
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

La figure (11) illustre ce tableau.

On constate que la valeur approchée fournie par la méthode des séries tronquées est d'autant meilleure que μ^2 est petit et $\mathcal{M}$ grand. On vérifie d'ailleurs directement par (6-3-1) et (6-3-22) que : $p_s \to p_{st}$ si $\mathcal{M} \to \infty$ quel que soit la valeur de l'indice adiabatique du fluide.

- Ecoulements (E) et (P) :

Dans cette hypothèse, l'écoulement ne présentant plus de symétrie axiale le choc au sommet de l'obstacle n'est plus normal et la valeur exacte de la pression en ce point ne peut plus être calculée directement, le sommet n'étant plus un point d'arrêt. Il est par conséquent naturel de calculer une valeur approchée de cette pression par la méthode des séries tronquées. Les formules (6-3-7) et la valeur de $[F''_{t^2}(0)]_{(E)}$ définie par (2-4-5) permettent de calculer l'expression :

$$(6\text{-}3\text{-}24)\qquad [\bar{c}(1-\mu^2)(M^2-1).P'_x(0,0,0)+M.P'_t(0,0,0)]_{(E)}=\frac{(1+\mu^2)\bar{c}[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](\alpha)}{[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]M^2}.(f''_{y^2}+f''_{z^2})$$

(α) étant défini par (6-3-21).

De la même façon les expressions (6-3-9) permettent de calculer :

$$(6\text{-}3\text{-}25)\quad \begin{cases} [\bar{\sigma}(1-\mu^2)(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2+1-\mu^2].P''_{xt}(0,0,0)+M^3.P''_{t^2}(0,0,0)]_{(E)} = \\ = \dfrac{(1+\mu^2)\bar{\sigma}^2[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]^2(M^2-1)}{M^3(M^2+1)[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]}\left[M^4(\gamma)-(1-\mu^2)^2(M^4-1)[(1+\mu^2)M^2+1-\mu^2](\beta)\right](f''_{y^2}+f''_{z^2}) \end{cases}$$

(β) et (γ) étant définis par (6-3-10).

Dans ces conditions on peut proposer comme valeur approchée de la pression au sommet dans les écoulements (E) et (P) l'expression suivante :

$$(6\text{-}3\text{-}26)\quad \boxed{\left(\frac{p_s}{p}\right)_{(E)} = (1+\mu^2)M^2-\mu^2+2\,\frac{(1+\mu^2).(M^2+1).(\alpha)^2}{(M^2-1)\left[(1-\mu^2)^2(M^4-1)[(1+\mu^2)M^2+1-\mu^2](\beta)-M^4(\gamma)\right]}}$$

dans laquelle M a toujours la valeur (6-3-23).On a calculé les valeurs de cette expression pour les gaz mono bi et triatomiques et pour quelques valeurs du nombre de Mach amont $\mathcal{M}$.

Valeurs de $\left(p_s/p\right)_{(E)}$

$\mathcal{M}$	Monoatomique:$\mu^2=0$	Diatomique:$\mu^2=1/6$	Triatomique:$\mu^2=1/4$
1	3,653	4,755	5,747
2	7,306	9,847	12,003
3	12,969	18,999	23,334
4	20,337	31,777	39,322
5	29,545	46,913	59,903
6	40,671	68,172	85,064
10	104,874	184,468	231,466
15	229,942	411,542	517,413
20	404,967	729,439	919,063
25	629,978	1139,147	1434,096
30	904,984	1627,683	2061,531
∞	∞	∞	∞

La figure (12) illustre ce tableau.

Bien que pour les écoulements de révolution la valeur approchée de la pression ne soit pas trop mauvaise par rapport à la valeur exacte,avant d'accorder un crédit quelconque à (6-3-26),il sera nécessaire de la comparer aux valeurs exactes que l'on obtiendra par intégration numérique.Mais actuellement les résultats numériques les plus nombreux sont relatifs à des écoulements et à des obtacles

présentant chacun des éléments de symétrie. On peut signaler cependant le cas d'un disque circulaire soumis à un angle d'attaque qui a été étudié par Minailos. Il est évident que de tels profils non analytiques ne peuvent être étudiés par (6-3-26).

4) Pression et température sur un cône en écoulement de révolution.

Le procédé de passage à la limite utilisé pour déterminer les chocs attachés au sommet d'un obstacle conique demeure valable pour la formule (6-3-6). Les formules (6-1-2) (6-1-3) (6-2-13) et (6-2-14) d'une part et les expressions des paragraphes 2 et 3 du chapitre V d'autre part déterminent donc la pression à la surface d'un cône du second ordre quelconque. Il est clair que la formule obtenue ne sera valable qu'en tout point distinct du sommet.

Afin de rester dans des limites raisonnables d'écriture on se limitera au cas d'un obstacle conique en écoulement de révolution.

Les notations étant celles du chapitre V, les formules (6-1-2) et (6-1-3) s'écriront

$$(6\text{-}4\text{-}1)\qquad \begin{cases} P'_x(y,0) = -(1+\mu^2)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\,\dfrac{\operatorname{otg}\theta_s}{U}\cdot\dfrac{1}{y} \\ \\ P'_t(y,0) = (1+\mu^2[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\,\dfrac{\operatorname{otg}\theta_s}{\sqrt{U}}\cdot\dfrac{1}{y} \end{cases}$$

le nombre de Mach de l'écoulement conique de révolution étant :

$$(6\text{-}4\text{-}2)\qquad M(\theta_s,\mu^2) = \frac{M\sin\theta_s}{2(1-\mu^2)} + \sqrt{\frac{M^2\sin^2\theta_s}{4(1-\mu^2)^2}+1}$$

Par conséquent en tout point distinct du sommet on aura :

$$(6\text{-}4\text{-}3)\qquad \bar{o}(1-\mu^2)(M^2-1).P'_x\sqrt{U}+M.P'_t = \bar{o}(1+\mu^2)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2](\mu^2M^2+1-\mu^2)\,\frac{\operatorname{otg}\theta_s}{\sqrt{U}}\cdot\frac{1}{y}$$

D'autre part les quantités intervenant dans le calcul de $[P''_{tx}(y,0)]_{(R)}$ et $[P''_{t^2}(y,0)]_{(R)}$ ont les expressions suivantes pour l'obstacle particulier considéré :

$$(6\text{-}4\text{-}4)\qquad \begin{cases} [F''_{ty}(y,0)]_{(P)} = [F''_{t^2}(y,0)]_{(P)} = [F'''_{yt^2}(y,0)]_{(P)} = [F'''_{t^3}(y,0)]_{(P)} = [P_x(y,0)]_{(P)} = 0 \\ \\ [F''_{t^2}(y,0)]_{(R)} = \bar{o}^2\,\dfrac{A_2}{\Delta}\,\dfrac{\operatorname{otg}\theta_s}{y} \quad ; \quad [F'''_{t^3y}(y,0)]_{(R)} = 0 \quad ; \quad H(y,M,\mu^2) = 0 \\ \\ [F'''_{t^3}(y,0)]_{(R)} = K(y,M,\mu^2) = \dfrac{\bar{o}^3G_3}{M(M^2+1)\Delta^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{U}}\cdot\dfrac{\operatorname{otg}^2\theta_s}{y} \end{cases}$$

$$
(6\text{-}4\text{-}4)\qquad \begin{cases} [A'_x(y,0)]_{(R)} = (1-\mu^2)\bar{o}\,\dfrac{M^2+1}{(\mu^2M^2+1-\mu^2)M}\,\dfrac{A_2}{\Delta}\,\dfrac{\operatorname{otg}\theta_s}{y\sqrt{U}} \\ [P'_x(y,0)]_{(R)} = -(1+\mu^2)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\,\dfrac{\operatorname{otg}\theta_s}{y}\,\dfrac{1}{U} \\ [P''_{xt}(y,0)]_{(P)} = [P''_{t^2}(y,0)]_{(P)} = 0 \end{cases}
$$

Dans ces conditions la formule (6-2-16) relative au cône de révolution s'écrira :

$$
(6\text{-}4\text{-}5)\qquad \begin{cases} [P''_{xt}(y,0)]_{(R)} = R(y,M,\mu^2) = \\ = \dfrac{-(1-\mu^4)\bar{o}(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]^2.(\delta_1)}{M[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]^2}\cdot\dfrac{\operatorname{otg}^2\theta_s}{y^2}\cdot\dfrac{1}{U\sqrt{U}} \end{cases}
$$

avec le coefficient :

$$
(6\text{-}4\text{-}6)\qquad (\delta_1) = M^6+M^4(-6\mu^2-1)+M^2(4\mu^2-7)+2\mu^2-1
$$

La formule (6-2-17) conduit de même à l'expression :

$$
(6\text{-}4\text{-}7)\qquad [P''_{t^2}(y,0)]_{(R)} = \frac{(1+\mu^2)\bar{o}^2(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2].(\delta_2)}{(M^2+1)[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]^2}\cdot\frac{\operatorname{otg}^2\theta_s}{y^2}\cdot\frac{1}{U}
$$

avec le coefficient :

$$
(6\text{-}4\text{-}8)\qquad \begin{cases} (\delta_2) = 2[M^4+(2\mu^2+1)M^2+2(1-\mu^2)](\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2]+ \\ \quad +(1-\mu^2)(M^2+1)[M^6+M^4(-6\mu^2-1)+M^2(4\mu^2-7)+2\mu^2-1]- \\ \quad -(\mu^2M^2+1-\mu^2)(M^2+1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2][(\mu^2+1)M^4+(2\mu^2+1)M^2+2-3\mu^2] \end{cases}
$$

Dans ces conditions on peut écrire en tout point distinct du sommet :

$$
(6\text{-}4\text{-}9)\qquad \begin{cases} \bar{o}(1-\mu^2)(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2+1-\mu^2].P''_{xt}(y,0).\sqrt{U} + M^3P''_{t^2}(y,0) = \\ = \dfrac{(1+\mu^2)\bar{o}^2(M^2-1)[(1+\mu^2)M^2-\mu^2].(\delta)}{(M^2+1)M[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]^2}\cdot\dfrac{\operatorname{otg}^2\theta_s}{y^2}\cdot\dfrac{1}{y} \end{cases}
$$

avec le nouveau coefficient :

$$
(6\text{-}4\text{-}10)\qquad (\delta) = M^4(\delta_2)-(1-\mu^2)(M^4-1)[(1+\mu^2)M^2+1-\mu^2][(1+\mu^2)M^2-\mu^2]\left[\begin{matrix} M^6+M^4(-6\mu^2-1)+ \\ +M^2(4\mu^2-7)+2\mu^2-1 \end{matrix}\right]
$$

Par suite la pression le long de l'obstacle conique en écoulement de révolution sera déterminée pour de grandes valeurs de la vitesse par l'expression :

(6-4-11) $$\frac{p}{\bar{p}} = (1+\mu^2)M^2 - \mu^2 - \frac{2(1+\mu^2).[(1+\mu^2)M^2-\mu^2].(M^2+1)(\mu^2M^2+1-\mu^2)^2.M^2.[(3\mu^2+1)M^4-(2\mu^2-3)M^2-\mu^2]^2}{(M^2-1)(6)}$$

Holt a montré que dans un écoulement conique quelconque, les surfaces à entropie constante sont des cônes et que l'obstacle est l'une de celles-ci. Ici, l'écoulement conique étant de révolution, est isentropique partout. On déduira donc de la formule (6-4-11) la valeur de la température sur l'obstacle sous la forme :

(6-4-12) $$\frac{T}{\bar{T}} = \left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{\frac{2\mu^2}{1+\mu}}$$

en désignant par $\bar{T}$ la température absolue dans la région amont.
Les conclusions relatives à la formule (6-3-26) demeurent valables pour (6-4-11) qui sera d'autant meilleure que l'ouverture et la vitesse de l'obstacle sont grandes.

5) Sur d'autres applications des transformations de Padé-Shanks

Il est clair que la formule (6-3-3) est applicable à la distribution des vitesses sur l'obstacle. Les calculs effectués au second chapitre sont en effet suffisants pour déterminer les dérivées initiales premières et secondes de la vitesse en un point quelconque de l'obstacle. La transformation de Padé déterminera par suite la valeur approchée de la vitesse au premier ordre au sens des transformations considérées. Cela conduira naturellement à l'étude du point sonique et de la vitesse au voisinage du point d'arrêt que l'écoulement présente ou non une symétrie géométrique.

- Il serait séduisant d'opérer de même pour la détermination de la masse spécifique et par suite de la température à la surface de l'obstacle. Si l'on considère les écoulements de révolution les équations des chocs normaux déterminent la valeur au sommet de la masse spécifique. Pour un gaz diatonique et pour $M_\infty = 10$ on obtient $P \neq 170$ et $R = \frac{\bar{\rho}}{\rho} \neq 0{,}2$. Il est donc clair que la seule transformation du premier ordre de Padé est illusoire en ce qui concerne R même pour de grandes vitesses. Cela confirme qu'en écoulement à grande vitesse l'hypothèse de la constance de la masse spécifique derrière le choc est très valable : le problème de l'écoulement aval est alors celui d'un fluide incompressible. On pourra consulter à ce sujet le travail de J.P. Guiraud relatif à l'écoulement hypersonique d'un fluide parfait sur un obstacle arrondi. Les mêmes difficultés ont été rencontrées dans les méthodes numériques par Babenko, Voskresenskij, Ljubino et Rusanov.

- Les résultats obtenus au cours de ce travail peuvent servir de solution de départ pour des calculs effectués par machine électronique.La convergence est en effet d'autant plus rapide que la première valeur choisie est plus exacte.Ils montrent aussi par le passage des écoulements instationnaires au régime stationnaire que la solution d'un problème sous forme fractionnaire est plus souple que les développements entiers généralement utilisés.C'est le cas par exemple du mouvement d'une sphère dans un fluide visqueux étudié par Goldstein pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds et repris par Shanks : le développement fractionnaire fait apparaitre une singularité de la solution de Goldstein qui est tout à fait acceptable.Pour d'autres applications des méthodes de Padé-Shanks on pourra consulter l'article de G.A.Baker et l'ouvrage de M.Van Dyke sur les méthodes approchées en mécanique des fluides.

Ecoulements (P)

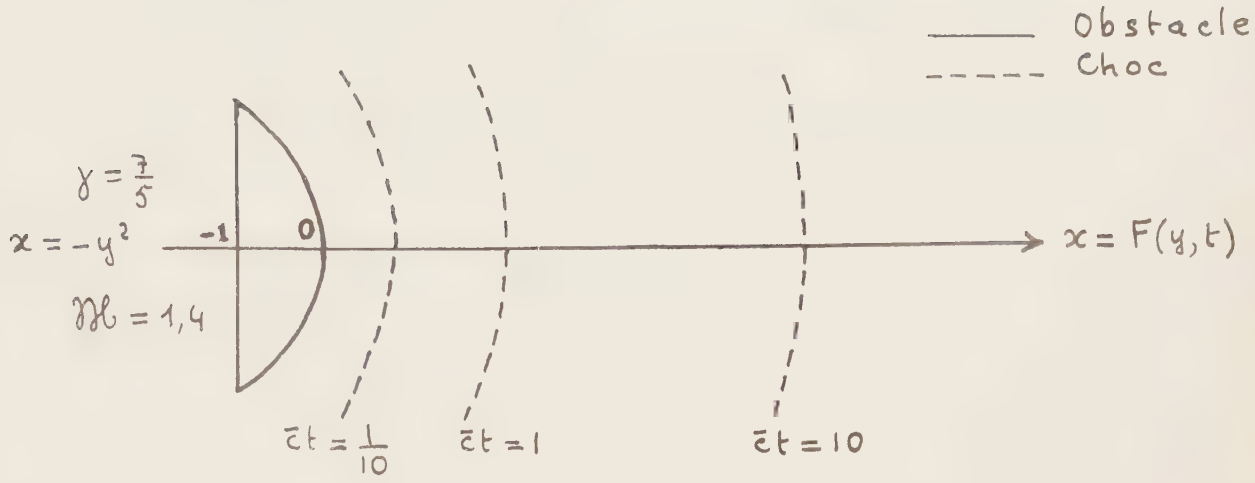


Figure 1

Ecoulements (R)

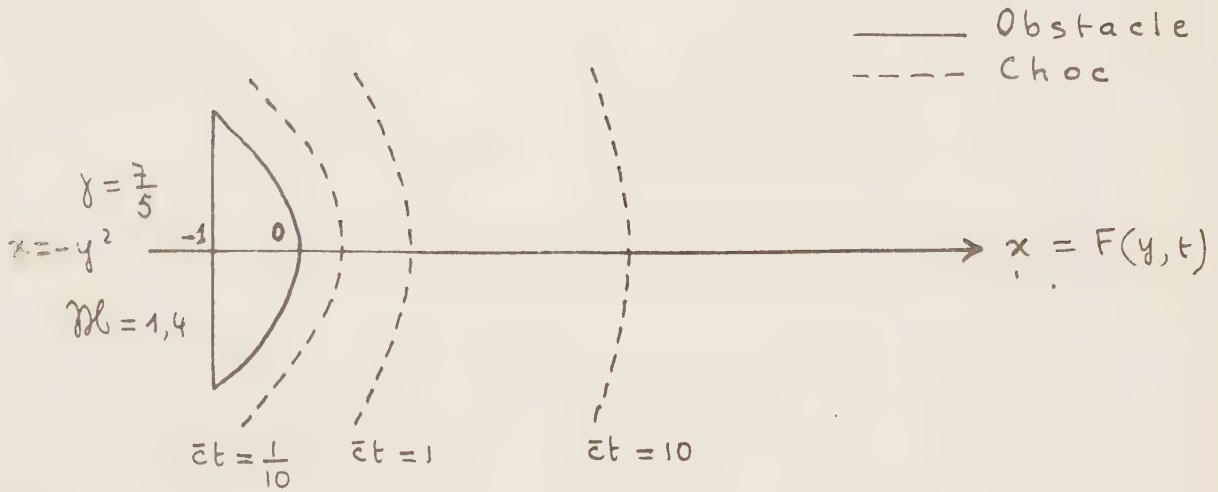


Figure 2

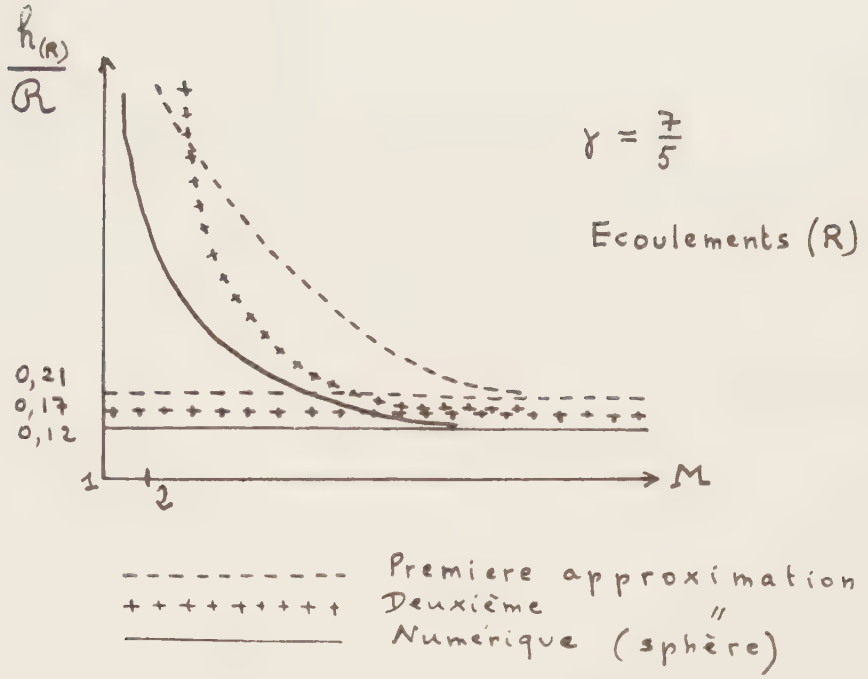


Figure 3

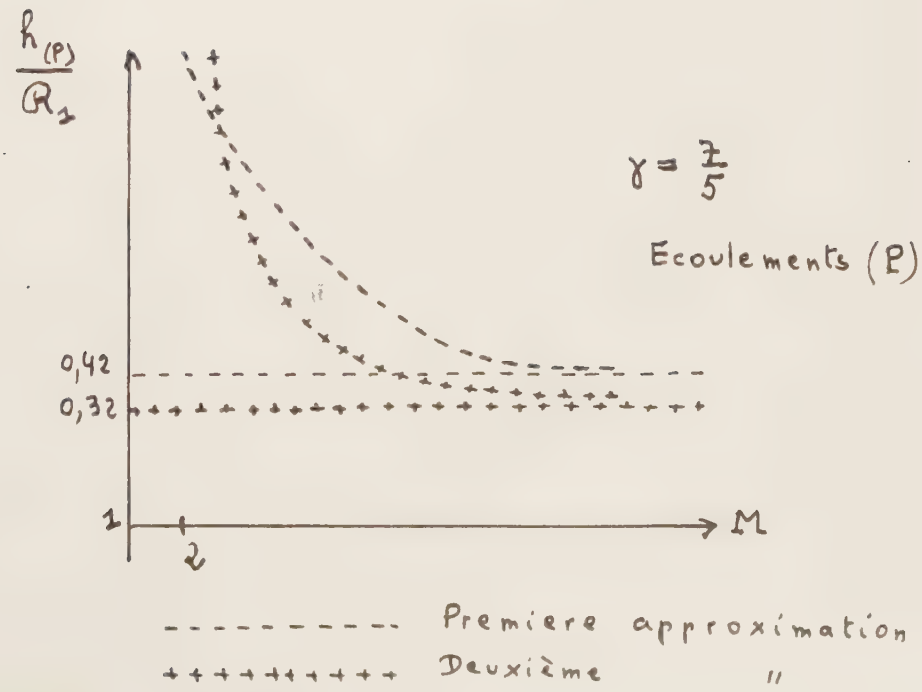


Figure 4

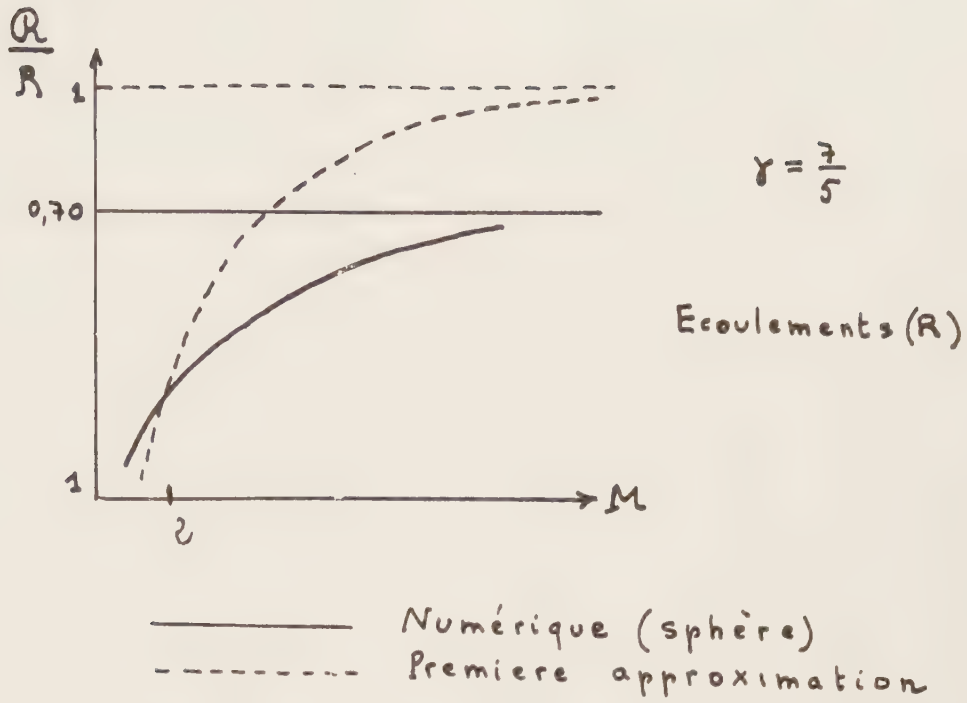


Figure 5

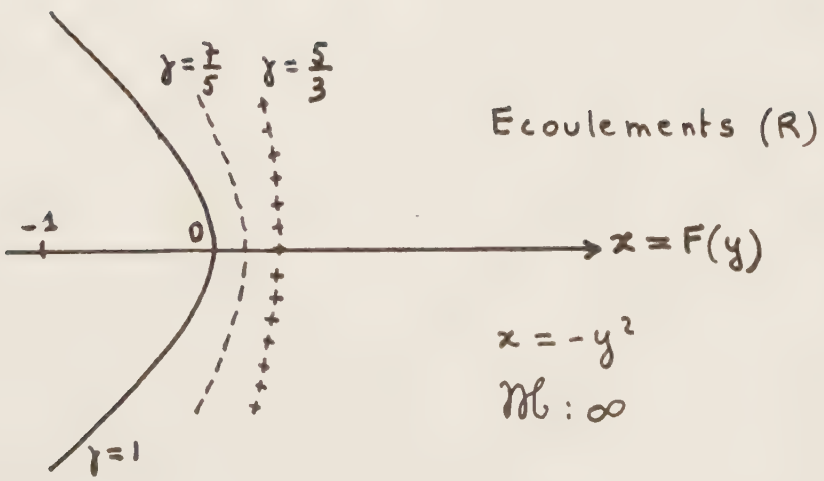
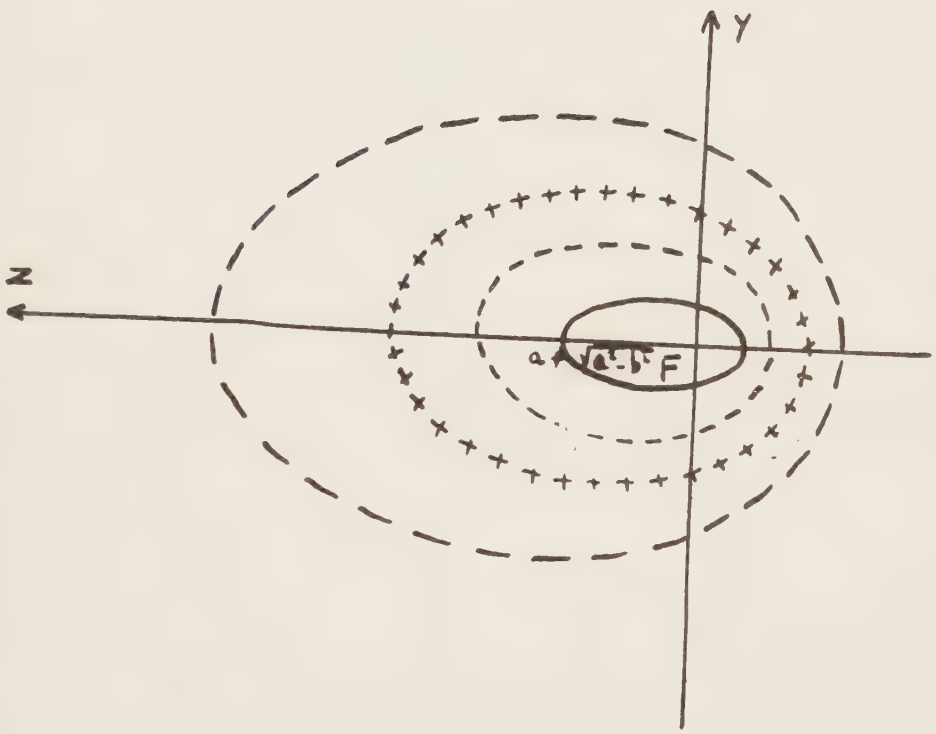


Figure 6

Ecoulements (E)



——————— Obstacle

— — — — $\mathcal{M} = 9,58$

+ + + + + + + $\mathcal{M} = 13,10$

– – – – – – – $\mathcal{M} = 16,61$

$\gamma = \frac{7}{5}$

Figure 8

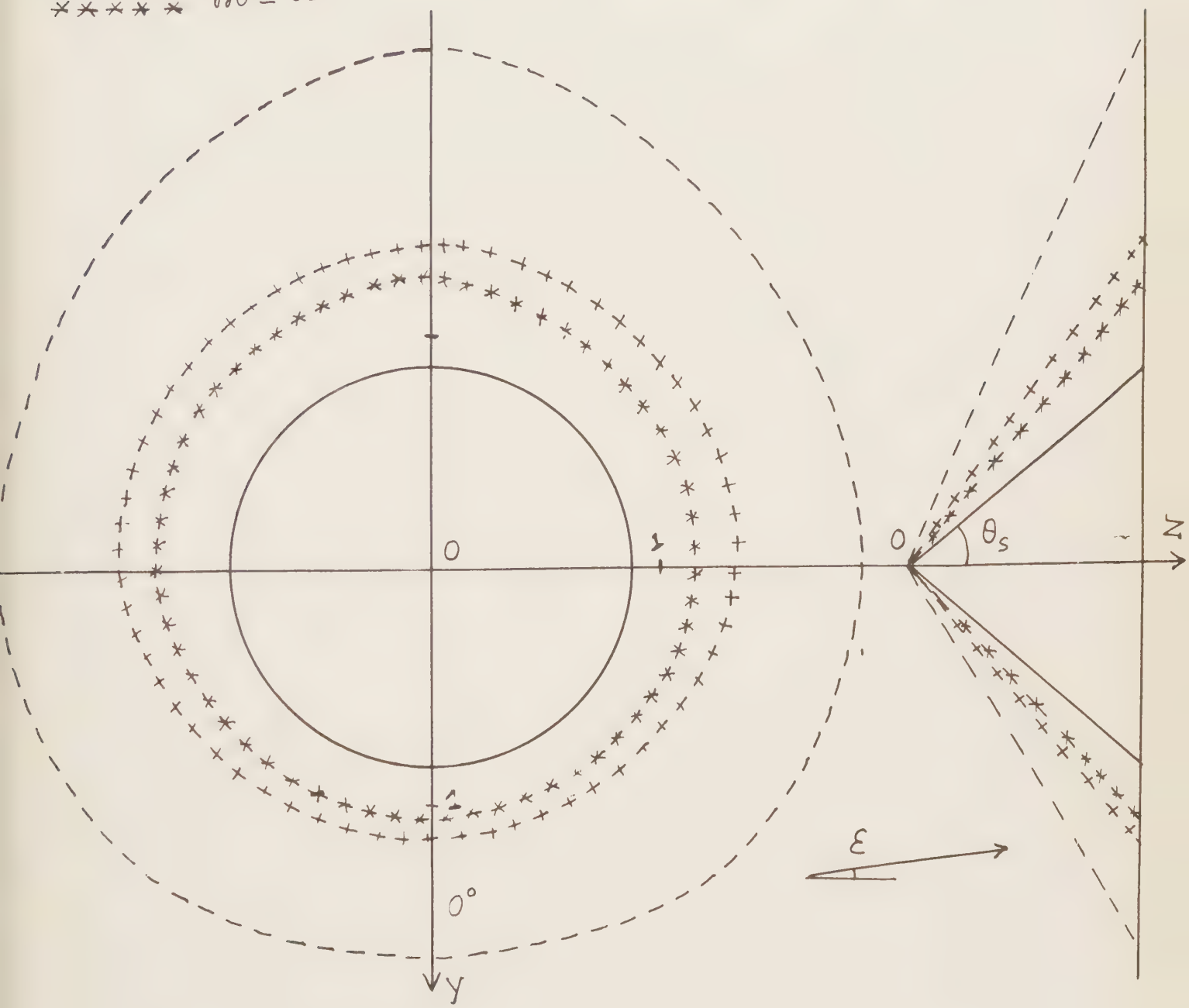

Obstacle
$\mathcal{H} = 5$
$\mathcal{H} = 15$
$\mathcal{H} = 25$
$\gamma = \frac{7}{5}$
$\theta_s = 40°$
$\varepsilon = 5°$
O
1
O
θ_s
N
ε
0°
y

Figure 9

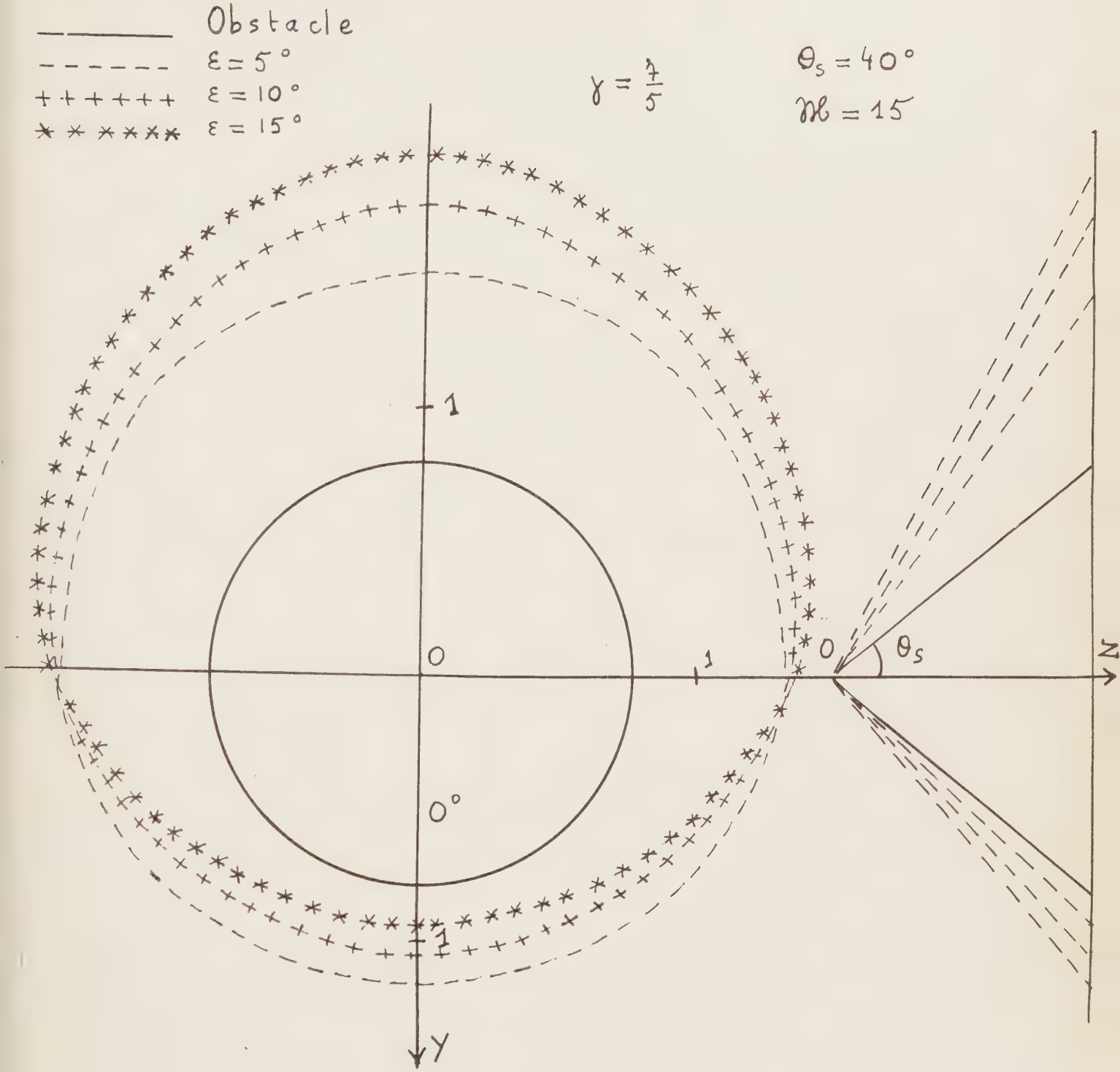


Figure 10

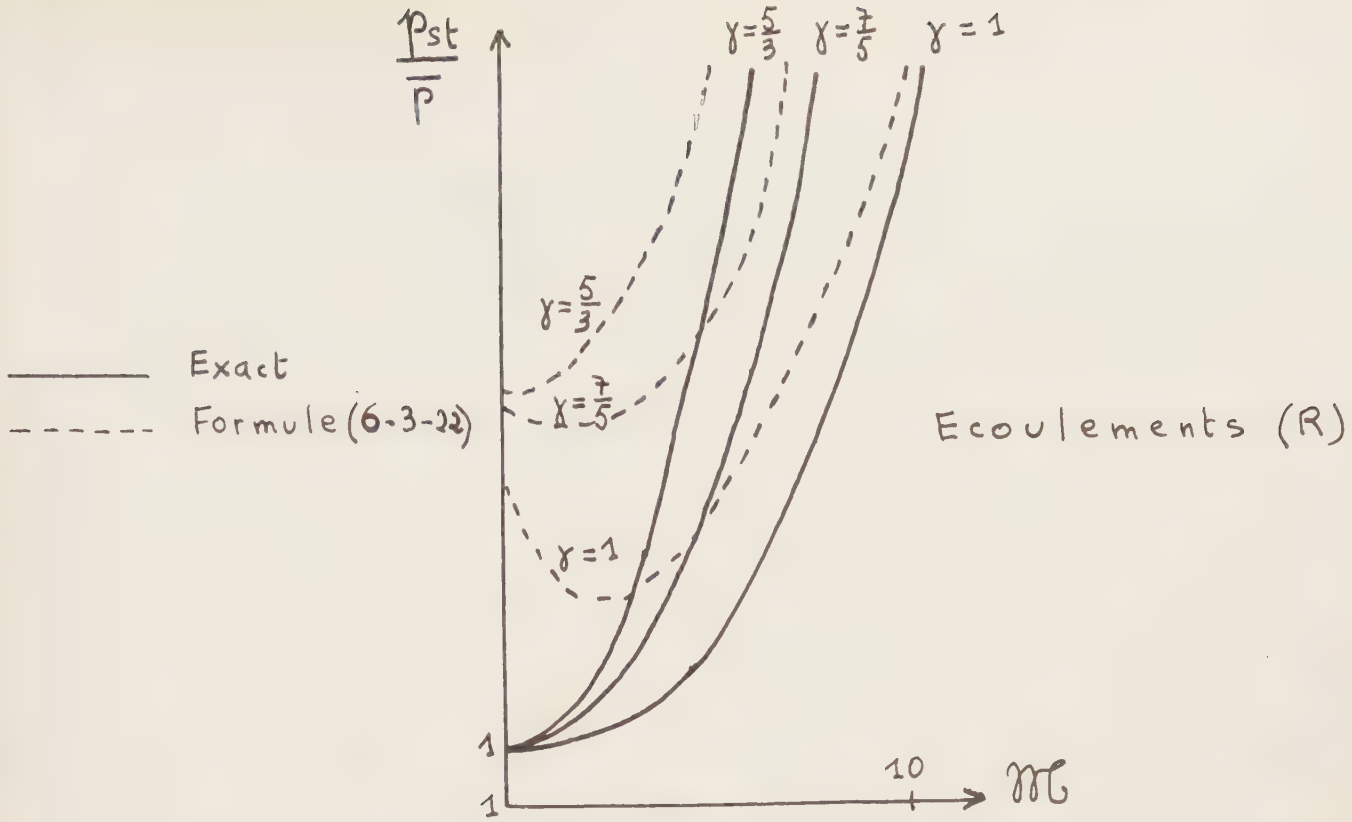


Figure 11

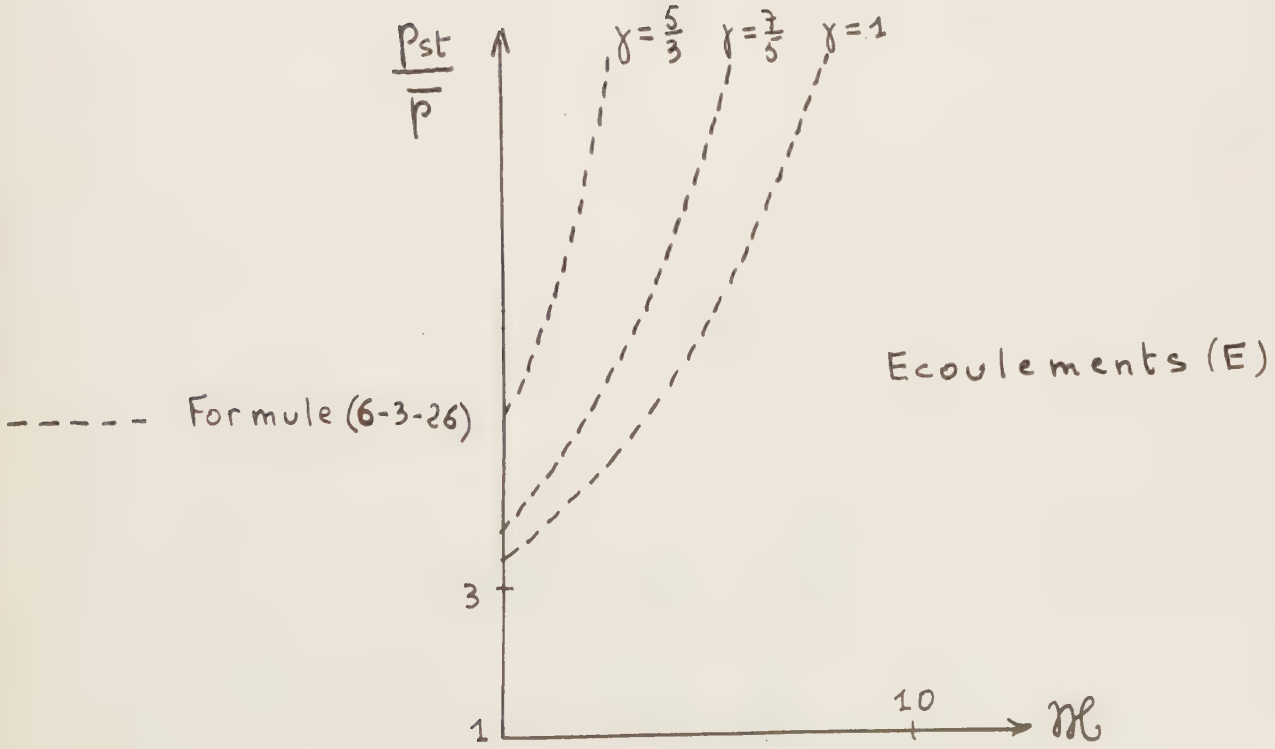


Figure 12

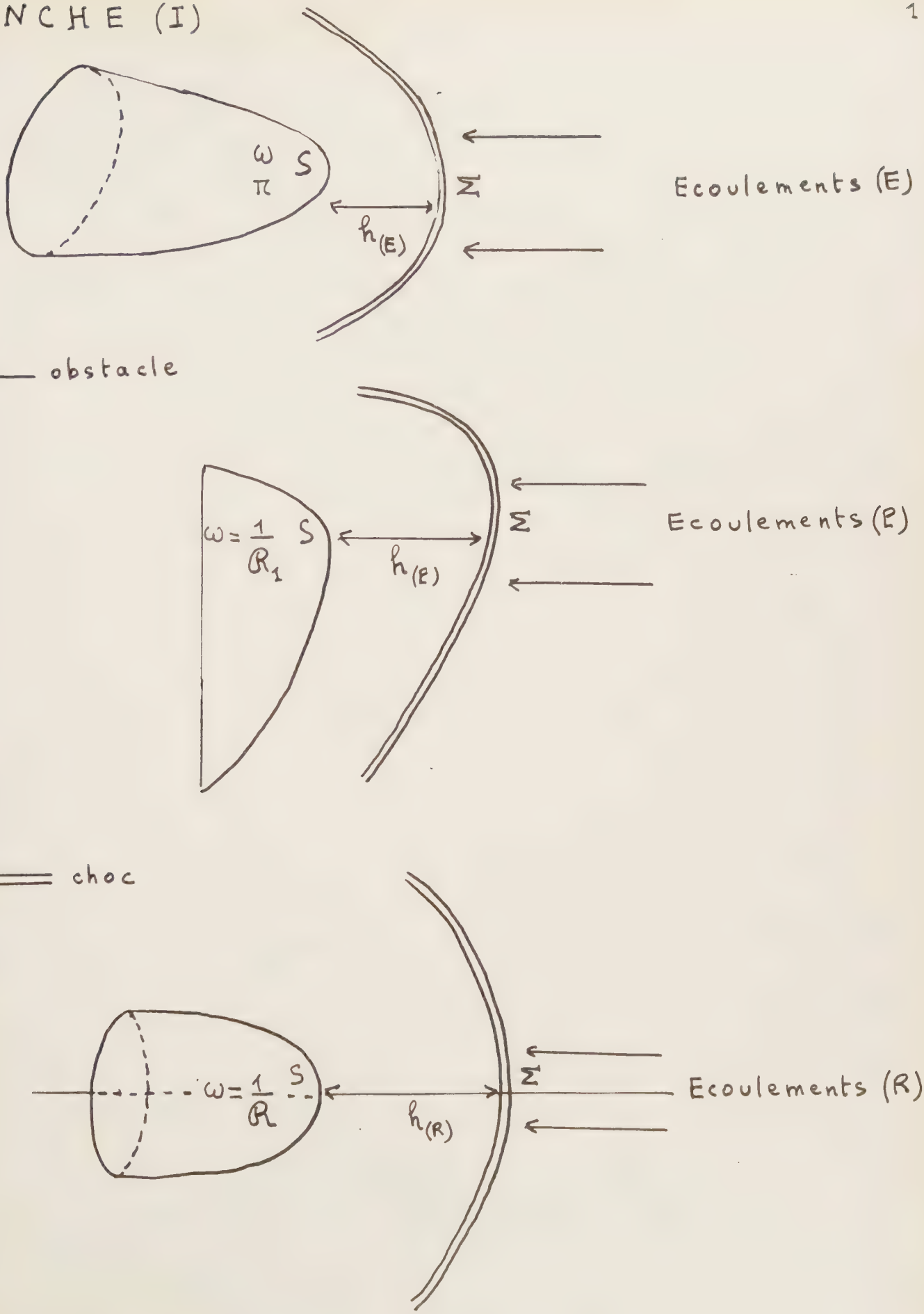
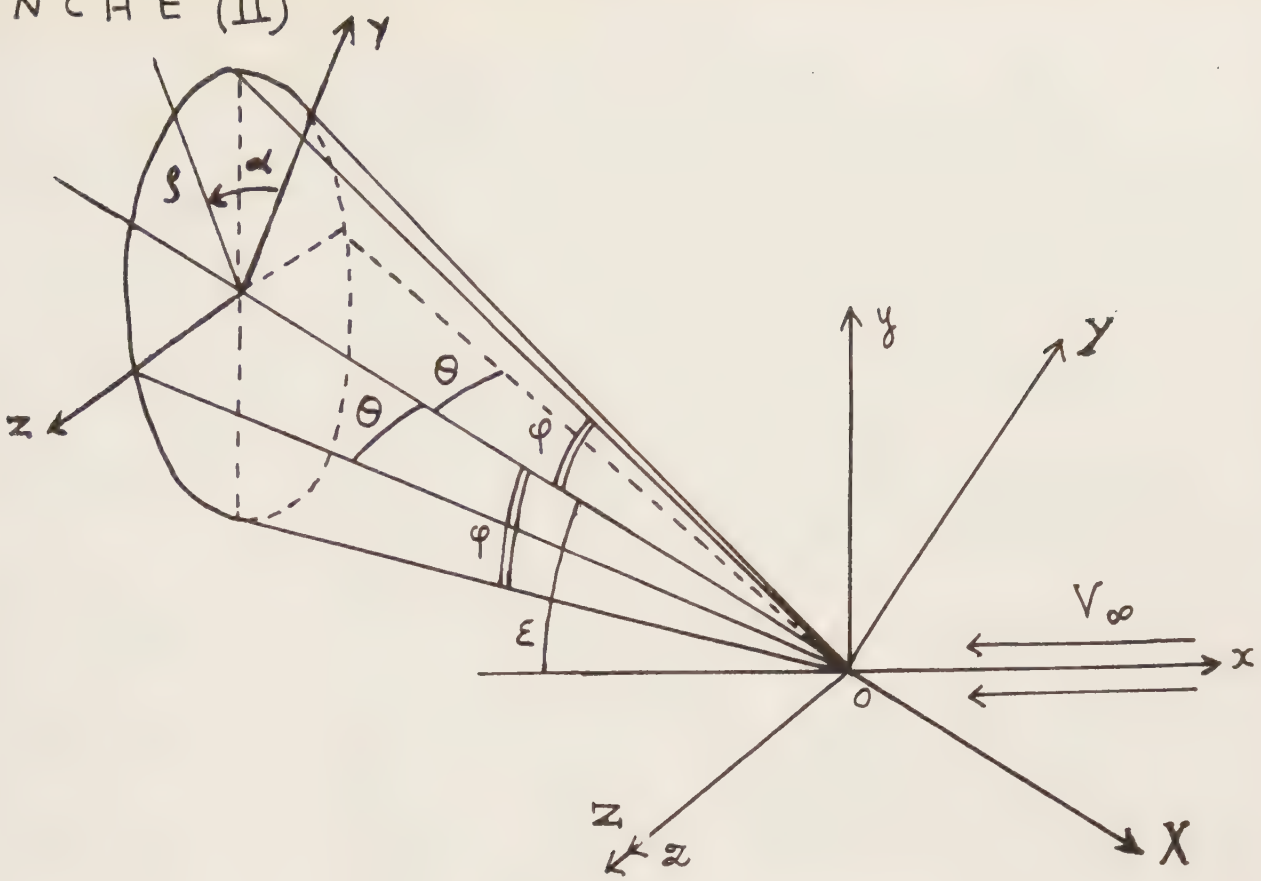
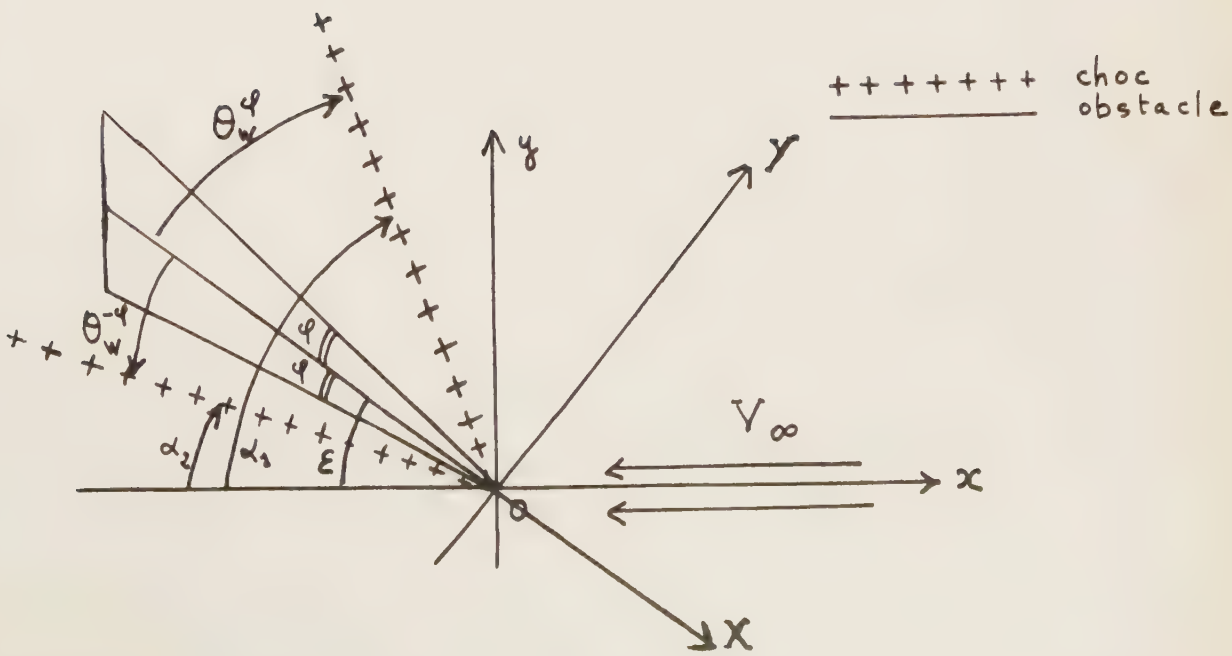

ω
π
S
Σ
$h_{(E)}$
Ecoulements (E)
obstacle
$\omega = \frac{1}{R_1}$
S
Σ
$h_{(E)}$
Ecoulements (E)
choc
$\omega = \frac{1}{R}$
S
Σ
$h_{(R)}$
Ecoulements (R)

PLANCHE (II)



Ecoulements coniques



- Références sur les méthodes de Padé et de Shanks -

1) Andoyer H.	La théorie de la lune - Gauthier-Villars Paris (p.59)	1926
2) Baker Jr.G.A.	The theory and applications of the Padé approximant method - Advances in theoretical Physics 1 - (1-58)	1965
3) Isakson G.	A method for accelerating convergence of an iteration procedure - J.Aero.Soc.Vol.16 n°7 (p.443)	1949
4) Lubkin Samuel	A method of summing infinite series - Journal.Research Nat.Bur.Stand.Vol.48 n°3 (March 1952)	1950
5) Padé H.	Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles - Annales de l'Ecole Normale Supérieure 3ème série.tome 9.	1892
6) Samuelson P.A.	A convergent iterative process - Journal of Math. and Physics Vol.24 (131-134)	1945
7) Shanks D.	Non linear transformations of divergent and slowly convergent sequences - Am.Math.Mon.Vol.57 n°6 (439)	1949
8) Shanks D.	Non linear transformation of divergent and slowly convergent sequences and an example from hydrodynamics Phys.Rev.(876) n°6	1949
9) Wall H.S.	Continued fractions - New-York - (Chapter 20)	1948

- Références sur les écoulements avec chocs -

10) Asher H.Shapiro — The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow - M.I.T. — 1953

11) Cabannes H. — Etude du départ d'un obstacle dans un fluide au repos - Recherche Aéronautique (36) — 1953

12) Courant R. and Friedrichs K.O. — Supersonic flow and shock waves - New-York - Interscience Pub. — 1948

13) Eselangon E. — Ondes et détonations balistiques engendrées par les avions et les projectiles - Mémorial de l'Artillerie Française.(27)-4ème fascicule. — 1953

14) Guiraud J.P. — Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur un obstacle arrondi - O.N.E.R.A. Rapport 2/2204 A. — 1960

15) Hadamard J. — Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique - Paris Hermann 1903 - Réimprimé par Chelsea Publishing Company.New-York . — 1949

16) Hayes N.D. and Probstein R.F. — Hypersonic flow theory - Academic Press. — 1959

17) Holt M. — Basic developments in fluid dynamics - Academic Press — 1965

18) Hugoniot H. — Sur la propagation des mouvements dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits - Journal Ecole Polytechn.58 (1-125) — 1889

19) Lin C.C. and Shen S.F. — An analytical determination of the flow behind a symetrical curved shock in an uniform stream -M.I.T — 1951

20) Meyer R.E. — On waves of finite amplitude in ducts. Quart.Mech.Appl.Math.5 (257-299) — 1952

21) Rankine W.J.M. — On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance - Trans.Roy.Soc.Lond. 160 (277-288). — 1870

22) Riemann B. — Uber die Fortpflanzung ebener luftwellen von endlicher schwingungsweite - Abh.Ges.Wiss.Gottingen Math.Phys.KL.8-43 — 1860

23) Stanjukowich — Dokl.Akad.Nauk S.S.S.R. (441-444) — 1954

24) Taylor G.I. — The air wave surrounding and expanding sphere - Proc.Roy.Soc.Lond.Serie A - 201 (159-189) — 1950

25) Van Dyke M.D. Perturbation methods in fluid mechanics - Academic Press 1964

26) Van Dyke M.D. The supersonic blunt-body problem - Review and extension N.A.C.A. 1958

27) Witham G.B. The propagation of spherical blast - Proc.Roy.Soc.Lond. Serie A - 203 (571-581) 1950

- Références sur les chocs détachés -

28) Busemann A. — A review of analytical methods for the treatment of flows with detached shocks.N.A.C.A. Technical Report 1858 — 1949

29) Cabannes H. — Le problème de l'onde de choc détachée pour les écoulements de révolution - Recherche Aéronautique 21 — 1951

30) Cabannes H. — Détermination approchée de l'onde de choc détachée- C.R. tome CCXXIX (492-493) — 1949

31) Germain P. — Sur le problème de l'onde de choc détachée - C.R. tome CCXXIV (1051-1053) — 1947

32) Garabedian P.R.and Lieberstein H.M. — Examples of detached bow shock waves in hypersonic flow - Stanford University — 1958

33) Hide K. — An approximation study on the detached shock wave in front of a circular cylinder and a sphere - Journal of the Physical Society of Japan Vol.8 (740-745) — 1953

34) Laitone E. and Pardee P. — Location of detached shock wave in front of a body moving of supersonic speeds. N.A.C.A. R.M.A.7 - — 1947

35) Lin C.C. and Rubinov S. — On the flow behind curved shocks - Journal Math. and Phys. XXVII (105-129) — 1948

36) Mitchell A.R. and F.Mc Call — The rotational field behind a bow shock wave in axially symetric flow using relaxation methods - Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Vol.53 (371-381) — 1952

37) Moeckel W. — Approximate method for predicting form and location of detached shock waves ahead of plane or axially symmetric bodies - N.A.C.A. T.N. 1921 — 1949

38) Van Dyke M.D. — Hypersonic flow behind a paraboloïdal shock wave - Journal de Mécanique.Vol.4.n°4 - — 1965

39) Witham G.B. — A note on the stand of distance of the shock in high speed flow past a circular cylinder - Communications on Pure and Applied Mathematics . 10 - (531-535) — 1957

- Références sur les chocs coniques -

40) Broderick J.B.	Supersonic flow past a semi-infinite cone Quart.Jour.Mech.and Appl.Math.-2.pt 1	1949
41) Broderick J.B.	Supersonic flow round pointed bodies of revolution - Quart.Jour.Mech.and Appl.Math. 2 - Pt 1.	1949
42) Ferri A.	Supersonic flow around circular cones at angles of attack - N.A.C.A Techn. Note n° 2236	1950
43) Ferri A,Ness N.and Kaplita T.	Supersonic flow over conical bodies without axial symetry - J.Aero.Sci.-20 (563-571)	1953
44) Holt M.	A vertical singularity in conical flow - Quart.J.Mech.Appl.Math.7 (438-445)	1954
45) Stone A.H.	On supersonic flow past a slighty yawing cone - J.Math.Phys.27 (64-81)	1948
	J.Math.Phys.30 (200-213)	1952
	J.Math.Phys.31 (300)	1953
46) Taylor G.I and Maccoll J.W.	The air pressure on a cone moving at high speeds - Proc.Roy.Soc.Lond.Ser.A 139 (278-311)	1933

- Références sur les méthodes numériques -

47) Babenko K.I, Voskresenskij G.P, Ljubimo A.N. Rusanov V.V. — Ecoulement dans l'espace autour de corps lisse d'un gaz idéal - Akad.Nauk SSSR - Mat.Inst.V.A Steklov Moscou — 1964

48) Belotserkovskii O.M — Calculation of flow abount axisymetric bodies with detached shock wave - (Computational formulas and flow field tables) Vych.Tsentr.Akad.Nauk SSSR - Moscow - 1961

49) Cabannes H. — Tables pour la détermination des ondes de chocs détachées - Recherche Aéronautique 49. 1956

50) Chubb D.L. — Solution to the flow abount a two dimensional flat plate at infinite Mach number - J.A.S 27 (1-68) 1960

51) Dorodnitsynna A. — On the method of numerical solution of some non linear problems of aerodynamics - Actes du 9ème Congrès de Mécanique Vol.1 (485) 1957

52) Dorodnitsyn A.A. — The calculation of pressure distribution on bodies of revolution in supersonic flow of a gas. Sbornik "Theoretical work on aerodynamics "- Oborongis Moscow — 1 st ed.1949

53) Garabedian P.R.and Liberstein H.M. — On the numerical calculation of detached bow shock waves in hypersonic flow - J.A.S 25 Stanford University - 1957

54) Heberlé J.,Wood G. and Gooderum P. — Data on shape and location of detached shock waves on cones and spheres - N.A.C.A. Technical Note n° 2000 1950

55) Holt M.and Gold R. — Calculation of supersonic flow past a flat-headed cylinder by Belotserkovskii method - Divis.Appl. Math. - Brown University Providence R.J. A.F.O.S.R. TN : 59-199-AD : 211-525. 1959

56) Kopal Z. — Tables of supersonic flow around cones - Technical Report n°1 - M.I.T 1947

57) Kopal Z. — Tables of supersonic flow around yawing cones - Technical Report n°3 - M.I.T 1947

58) Kopal Z. — Tables of supersonic flow around cones of large yaw - Technical Report n°5 - M.I.T — 1949

59) Korobeinikov V.P., Chushkin P.I. and Sharovatova K. — Tables of gas dynamic functions for the initial stage of point blast - Vych.Tsentr.Akad.Nauk SSSR - Moscow — 1963

60) Mangler K.W and Evans B.A. — The calculation of the inviscid flow between a detached bow wave and a body - R.A.E TN : 2536 — 1957

61) Minailos A N. — Zh.Vych.Mat.i Mat.Fiz.4 - (171-177) — 1964

62) Roberts J., Lewis C., Reed M. — Ideal gas spherically blunted cone flow fields solutions at hypersonic conditions - A.E.D.C. Tr.(66-121) — août 1966

63) Uchida S. and Yasuhara M. — The rotational field behind a curved shock wave calculated by the method of flux analysis - J.A.S 23 (830-845) — 1956

64) Vaglio-Laurin R. — J.Aerospace Sc.29 (185-206) and 248 — 1962

65) Van Dyke M.D. and Gordon H. — Supersonic flow past a family of blunt axisymetric bodies - N.A.S.A. Technical Report R 1 — 1959

- Table des matières -

pages

- Introduction..... 1
- Chapitre I - Enoncé du problème ; exposé de la méthode de Shanks
  - 1) Mouvements continus (E) (P) et (R)..... 6
  - 2) Conditions aux limites des phénomènes de choc..... 7
  - 3) Chocs créés par le départ d'un obstacle..... 8
  - 4) Sur les transformations de Shanks..... 10
- Chapitre II - Calcul préliminaire des dérivées de la fonction F(y z t)
  - 1) Notations..... 15
  - 2) Position et vitesse initiales des chocs..... 16
  - 3) Calcul des coefficients du second ordre..... 18
  - 4) Valeur de $A_x(x\,y\,z\,o)$ et F''_{t^2}..... 20
  - 5) Dérivées initiales de $|A'|$..... 22
  - 6) Méthode de calcul des coefficients d'ordre supérieur..... 23
  - 7) Coefficients du $3^{ème}$ ordre en y, z et t 25
  - 8) Valeurs initiales de F'''_{t^3}..... 31
  - 9) Sur les coefficients du quatrième ordre..... 33
  - 10) Expressions de $F^{IV}_{t^2y^2}(0)$ $F^{IV}_{t^2zy}(0)$ et $F^{IV}_{t^3y}(0)$..... 35
  - 11) Valeurs initiales de $F^{IV}_{t^4}(0)$..... 38
- Chapitre III - Détermination des chocs détachés au voisinage du départ
  - 1) Sur les chocs instationnaires..... 42
  - 2) Distance des sommets parallèlement à la vitesse..... 42
  - 3) Courbure des chocs en leur sommet..... 46
  - 4) Développement algébrique des chocs au voisinage de leur sommet..... 50
  - 5) Approximations globales des chocs instationnaires..... 54
  - 6) Sur le calcul numérique des coefficients..... 57
- Chapitre IV - Equations des chocs détachés stationnaires
  - 1) Chocs détachés en écoulement stationnaire..... 61
  - 2) Méthode des séries tronquées de Padé-Shanks..... 62
  - 3) Distance des sommets parallèlement à la vitesse..... 64
  - 4) Courbure au sommet des chocs..... 69
  - 5) Approximation globale des chocs détachés..... 72

pages

- Chapitre V - Chocs stationnaires attachés à la pointe d'un cône
  1) Seconde approximation relative aux cônes de révolution (cas R) 75
  2) Cônes quelconques du second ordre..... 79
  3) Cônes elliptiques en écoulement symétrique (cas E)..... 82
  4) Position de la bissectrice des génératrices du choc..... 86
  5) Première approximation des écoulements coniques..... 87
- Chapitre VI - Grandeurs caractéristiques de l'écoulement à la surface de l'obstacle
  1) Valeurs initiales de $\frac{\partial P}{\partial \vec{r}}$ et $\frac{\partial P}{\partial \vec{s}}$ 93
  2) Détermination de $P''_{xt}(0)$ et $P''_{t^2}(0)$..... 95
  3) Détermination de la pression sur l'obstacle..... 101
  4) Pression et température sur un cône (cas R)..... 108
  5) Sur d'autres applications des transformations de Padé-Shanks. 110
- Figures..... 112
- Bibliographie..... 122

Thèse complémentaire

Proposition donnée par la Faculté :

" Etude des mouvements d'un matériau dont le taux d'allongement demeure constant (travaux de Coleman et Noll)".

Vu et approuvé :

Paris le : ..... Novembre 1966

Le Doyen de la Faculté des Sciences :

M.ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris

J.ROCHE